LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

ENCYCLOPÉDIE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (DEUXIÈME VOLUME),

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

ENCYCLOPÉDIE
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (DEUXIÈME VOLUME),

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques.

Réimpression autorisée de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées,* publiée par fascicules entre 1904 et 1916 par Gauthier-Villars et B.G. Teubner.

La publication de l'édition française a été définitivement interrompue en 1916 en raison de la guerre.

Cette réédition a été réalisée avec des volumes obligeamment prêtés par les Bibliothèques de l'École Normale Supérieure, de l'École Polytechnique et du Conservatoire National des Arts et Métiers.
De précieuses épreuves, aimablement confiées par M. Jean-Luc Verley, Maître de conférences à l'Université de Paris VII, ont permis de compléter l'article *Fonctions analytiques* écrit par W.F. Osgood, P. Boutroux et J. Chazy, et de terminer l'article *Développements concernant l'hydrodynamique* écrit par A.E.H. Love, P. Appell, H. Beghin et H. Villat.
Nous sommes particulièrement reconnaissants à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré, ainsi qu'à Mlle Karine Chemla, Chercheur au C.N.R.S., de nous avoir fourni de très utiles renseignements bibliographiques.
Nous adressons à tous nos plus sincères remerciements.

Tome III, volume 2 ISBN 2-87647-111-6
ISSN 0989-0602

ENCYCLOPÉDIE
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (DEUXIÈME VOLUME),

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

FRANÇOIS MEYER,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG,
B. G. TEUBNER

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TABLE DES MATIÈRES
des 7 premiers Tomes

Volume 2 — Fonctions de variables complexes

fasc. 1 – 23 mai 1911	II-7	Analyse algébrique **A. Pringsheim – G. Faber – J. Molk**	1-93
	II-8	Fonctions analytiques *(à suivre)* **W.F. Osgood – P. Boutroux – J. Chazy**	94-96
épreuve – 10 août 1912	II-8	*(suite)**	97-128

Volume 3 — Équations différentielles ordinaires

fasc. 1 – 22 février 1910	II-15	Existence de l'intégrale générale **P. Painlevé**	1-57
	II-16	Méthodes d'intégration élémentaires **E. Vessiot**	58-170

Volume 4 — Équations aux dérivées partielles

fasc. 1 – 30 juin 1913	II-21	Propriétés générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Équations linéaires du premier ordre. **E. von Weber – G. Floquet**	1-55
	II-22	Équations non linéaires du premier ordre. Équations d'ordre plus grand que un. **E. von Weber – E. Goursat**	56-160
fasc. 2 – 17 mars 1916	II-23	Groupes de transformations continus* **H. Burkhardt – L. Maurer – E. Vessiot**	161-240

Volume 5 — Développements en séries

fasc. 1 – 31 mars 1912	II-26	Équations et opérations fonctionnelles **S. Pincherle**	1-81
	II-27	Interpolation trigonométrique **H. Burkhardt – E. Esclangon**	82-153
	II-28	Fonctions sphériques *(à suivre)* **A. Wangerin – A. Lambert**	154-160
fasc. 2 – 12 février 1914	II-28	*(suite et fin)*	161-230
	II-28a	Généralisations diverses des fonctions sphériques **P. Appell – A. Lambert**	231-268

Volume 6 — Calcul des variations. Compléments

fasc. 1 – 15 septembre 1913	II-31	Calcul des variations *(à suivre)* **A. Kneser – E. Zermelo – H. Hahn – M. Lecat**	1-128
fasc. 2 – 16 juin 1916	II-31	*(suite et fin)*	129-288

Tome III — GÉOMÉTRIE

Volume 1 — Fondements de la géométrie. Géométrie générale

fasc. 1 – 30 mars 1911	III-1	Principes de la géométrie **F. Enriques**	1-147
	III-1a	Notes sur la géométrie non-archimédienne **A. Schoenflies**	148-151
	III-2	Les notions de ligne et de surface *(à suivre)* **H. von Mangoldt – L. Zoretti**	152-160
fasc. 2 – 8 juillet 1915	III-2	*(suite et fin)*	161-184
	III-3	Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le XIXe siècle **G. Fano – S. Carrus**	185-259
	III-4	Géométrie énumérative **H.G. Zeuthen – M. Pieri**	260-331
Elie Cartan, *Œuvres complètes* Partie III, Vol. 2, G.-V., 1955	III-5	La théorie des groupes continus et la géométrie **G. Fano – E. Cartan**	1-135

Volume 2 — Géométrie descriptive. Géométrie élémentaire

fasc. 1 – 23 décembre 1913	III-8	Géométrie projective **A. Schoenflies – A. Tresse**	1-143
	III-9	Configurations* **E. Steinitz – E. Merlin**	144-160

Volume 3 — Géométrie algébrique plane

fasc. 1 – 25 juin 1911	III-17	Coniques *(à suivre)* **F. Dingeldey – E. Fabry**	1-160
fasc. 2 – 3 août 1915	III-17	*(suite et fin)*	161-162
	III-18	Systèmes de coniques **F. Dingeldey – E. Fabry**	163-256
	III-19	Théorie générale des courbes planes algébriques* **L. Berzolari**	257-304

Volume 4 — Géométrie algébrique dans l'espace

fasc. 1 – 28 avril 1914	III-22	Quadriques **O. Staude – A. Grévy**	1-164

Tome IV — MÉCANIQUE

Volume 1 — Généralités. Historique

fasc. 1 – 15 mars 1915	IV-1	Principes de la mécanique rationnelle **A. Voss – E. Cosserat – F. Cosserat**	1-187
	IV-2	Mécanique statistique **P. Ehrenfest – T. Ehrenfest – E. Borel**	188-292

* *La fin de l'article n'a pas été publiée en raison de la guerre.*

III 8. GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **A. SCHOENFLIES** (FRANCFORT), PAR **A. TRESSE** (PARIS).

Aperçu historique.

1. La projection centrale. C'est le développement des théories de la perspective qui a donné naissance à la géométrie projective. Du jour où, en effet, *J. H. Lambert* et *G. Monge*, en créant la géométrie descriptive, eurent substitué des principes et des règles générales aux règles empiriques qui constituaient jusqu'alors l'art de la perspective, une étude particulière de leurs méthodes de projection s'imposait naturellement. Mais, en réalité, l'usage effectif de la projection centrale remonte beaucoup plus haut.

*Peut-être peut-on en voir un premier exemple dans les „propositions" de *Pappus*[1]), où l'on trouve une étude de l'intersection de la surface hélicoïdale à plan directeur soit avec un cône de révolution autour de son axe soit avec un plan passant par une de ses génératrices, étude où intervient la projection de chacune de ces courbes sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'hélicoïde. Plus tard *G. Desargues* introduisit dans l'art de la perspective une méthode rationnelle se rapprochant des procédés employés aujourd'hui dans la géométrie cotée; malheureusement ses idées, méconnues de son temps, restèrent sans influence; le mérite de les avoir soustraites à l'oubli[2]) appartient en

1) *Ces propriétés sont énoncées dans l'ouvrage de *Pappus* écrit au quatrième siècle de notre ère: *Συναγωγὴ μαθηματική* (livre 4, prop. 28 et 29); Pappi Alexandrini collectio, éd. *F. Hultsch* 1, Berlin 1875, p. 259, 263. Cf. *M. Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1re éd.): Mém. couronnés Acad. Bruxelles in 4°, 11 (1837), p. 30; (2e éd.) Paris 1875, p. 31; (3e éd.) Paris 1889, p. 31.*

2) *Les ouvrages que *G. Desargues* a publiés lui-même sont les uns excessivement rares, les autres introuvables. Tous les exemplaires de son principal ouvrage [Brouillon proiect d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan, Paris 1639] semblent perdus et l'on ne connaît cet ouvrage que grâce à une copie qu'en avait prise *Ph. de La Hire.* L'édition originale d'un autre de ses ouvrages [Exemple de l'une des manieres universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage, Paris 1636] a longtemps été introuvable et jusqu'en 1885 on ne le connaissait que par une réim-

premier lieu à un contemporain de *G. Desargues*, le graveur et géomètre *A. Bosse*[3]), qui en 1648 a reproduit la Perspective[2]) de 1636 et en 1665 s'en est occupé à nouveau[4]).*

A la même époque, *B. Pascal*[5]) démontrait son théorème sur l'hexagone en considérant une conique comme la projection d'un cercle.

*Un peu plus tard, *Ph. de La Hire*[6]) et *J. F. Le Poivre*[7]) étudiaient encore les propriétés projectives des coniques en se plaçant au point de vue d'*Apollonius*, consistant à regarder toute conique comme une section plane d'un cône à base circulaire.*

L'introduction de la notion de *point à l'infini* devait être d'une importance considérable dans les représentations projectives des figures. Déjà vers 1600, *Guidobaldo del Monte*[8]) enseigne que, dans une projection centrale, des droites parallèles sont représentées par des droites concourant en un même point *(point de fuite)*; puis, quarante ans après seulement, *G. Desargues*[9]) considère des droites parallèles comme passant par un même point à l'infini; beaucoup plus tard enfin, au 18ième siècle dans les travaux de *B. Taylor*[10]) et de *J. H. Lambert*[11]), la *ligne de fuite* d'un plan apparaît comme étant le lieu de tous ses points de fuite[12]). C'est à partir de cette époque que l'on rencontre divers essais d'application systématique de ce procédé qui, dans le but de simplifier une

pression faite en 1648 par *A. Bosse* [cf. *G. Eneström*, Bibl. math. (1) 2 (1885), col. 89/90; *P. Tannery*, Bull. sc. math. (2) 14 (1890), p. 245] (Note de *G. Eneström*).*

3) **A. Bosse*, Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral, Paris 1648; Traité des pratiques géométrales et perspectives, Paris 1665.*

4) *Les ouvrages de *G. Desargues* ont été réunis et publiés par *N. G. Poudra* [Œuvres de Desargues 1, Paris 1864; 2, Paris 1864]. Voir aussi *St. Chraszczewski*, Archiv Math. Phys. (2) 16 (1898), p. 119/49; *F. Amodeo*, Rendic. Accad. Napoli (3) 12 (1906), p. 232/62 (Note de *G. Eneström*).*

5) *Essay pour les coniques, petit placard en forme d'affiche, imprimé à Paris en 1640. Voir *B. Pascal*, Œuvres, éd. *L. Brunschvicg* et *P. Boutroux* 1, Paris 1908, p. 254.*

6) *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques, Paris 1673, p. 15 et suiv.; Sectiones conicae in novem libros distributae, Paris 1685, livre 2.*

7) *Traité des sections du cylindre et du cône, Paris 1704, p. 6, 28.*

8) *Perspectiva, Pise 1600.*

9) *Exemple de l'une des manieres universelles[2]).*

10) *Linear perspective, Londres 1716; (2e éd.) New principles of linear perspective, Londres 1719.*

11) *Freye Perspective, oder Anweisung jeden perspectivischen Aufriss von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen, Zurich 1759; (2e éd.) Zurich 1774.*

12) Pour plus de détails voir *Chr. Wiener* [Lehrbuch der darstellenden Geometrie 1, Leipzig 1884, p. 5/61] et *G. Loria*, „Perspektive und darstellende Geometrie" dans *M. Cantor*, Vorles. Gesch. Math. 4, Leipzig 1908, p. 577/637

démonstration, consiste à projeter une figure de façon que certains de ses éléments passent à l'infini ou affectent des dispositions spéciales[13]); les artifices les plus fréquemment employés consistent à projeter un point ou une droite à l'infini, un quadrilatère suivant un parallélogramme, une conique et une droite suivant un cercle et la droite de l'infini, un système de deux coniques suivant deux circonférences, une conique et un point suivant un cercle et son centre[14]). Au reste, toutes ces méthodes n'avaient, à l'origine, d'autre caractère que celui d'artifices ingénieux; ce n'est que *J. V. Poncelet* qui devait parvenir à les coordonner et à leur donner l'allure générale des théories de la géométrie projective[15]).

2. Théorie des transversales de Carnot. *A côté de *G. Monge*, il faut placer, parmi les fondateurs de la géométrie projective, *L. N. M. Carnot*.*

Les travaux de *L. N. M. Carnot* furent inspirés par la recherche des changements de signe qu'il faut effectuer dans les relations métriques s'appliquant à certains éléments, points, droites, etc., lorsqu'on modifie la position de ceux-ci, la situation relative de ces éléments les uns par rapport aux autres conservant toujours le même degré de généralité[16]). *L. N. M. Carnot* considère comme appartenant à un même

13) C'est par ces méthodes que, par exemple, *Ferriot* [Ann. math. pures appl. 3 (1812/3), p. 166] a démontré le théorème auquel on a donné le nom de *théorème des quadrilatères inscrit et circonscrit à une conique* [cf. nº 2] et *Ch. J. Brianchon* [Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817, p. 13] le théorème que l'on appelle *théorème sur l'involution de Desargues* [nos 2 et 13]. Au reste, on n'avait pas encore, au début du 19ième siècle, une notion bien claire de la droite de l'infini [cf. note 32]. Voir encore *O. Schlömilch* [Z. Math. Phys. 39 (1894), p. 117, 245] et *F. Schur* [id. p. 247].

14) La méthode de la projection stéréographique fut, elle aussi, employée souvent dans un but analogue, principalement par *M. Chasles*, qui l'étendit à une quadrique quelconque [Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 11]. Il s'agissait, du reste, de transformer, pour une quadrique, des propositions de géométrie plane, particulièrement des problèmes de contact. Voir *E. Catalan*, J. math. pures appl. (1) 19 (1854), p. 132.

15) La coordination de ces méthodes, déduites d'une même idée générale, se trouve dans *J. V. Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, (1re éd.) Paris 1822, p. 51; (2e éd.) 1, Paris 1865, p. 50; 2, Paris 1866. On y trouve également [(1re éd.) p. 60; (2e éd.) 1, p. 59] le lieu des points d'où l'on peut projeter deux coniques suivant deux cercles, et *J. V. Poncelet* [(1re éd.) p. 65, (2e éd.) 1, p. 63] ajoute que deux coniques bitangentes peuvent être projetées suivant deux coniques concentriques [voir, à ce sujet, *M. Chasles*, Traité des sections coniques, Paris 1865, p. 194].

16) La véritable raison qui inspirait les recherches de *L. N. M. Carnot* était son aversion pour les nombres négatifs, qu'il rejetait par principe, déclarant que leur emploi conduisait à des conclusions erronées [cf. De la corrélation des

type, et appelle *figures corrélatives*[17]) toutes celles qui se déduisent les unes des autres par une modification continue; partant de cette conception, il choisit la figure la plus simple possible comme figure initiale, en tire des conclusions, puis étend ces conclusions à chaque type de figure par une nouvelle étude particulière qu'il juge indispensable. Par cette tendance à rechercher la loi invariable à laquelle obéit chaque figure variable, *L. N. M. Carnot* a sérieusement contribué à l'introduction des idées modernes dont le développement constitue la géométrie projective[18]).

La méthode des transversales, les relations indépendantes de la forme accidentelle des figures auxquelles elle conduit, ont pendant longtemps influé sur les recherches géométriques. La plus importante de ces relations est la suivante:

Si un polygone plan (ou gauche) $ABC\ldots N$, est coupé par une droite (ou un plan) aux points $A'B'C'\ldots N'$, on a toujours

$$AA'\cdot BB'\ldots NN' = BA'\cdot CB'\ldots AN'.$$

Des propositions analogues s'appliquent aux cas où le polygone est coupé par un nombre quelconque de transversales, ou par une courbe algébrique[19]). Par exemple, dans le cas d'un triangle ABC coupé par une cubique, si les côtés BC, CA, AB rencontrent respectivement la

figures en géométrie, Paris an IX (1801), p. 2, 24; Géométrie de position, Paris an XI (1803), p. II]. Des réfutations de la pensée de *L. N. M. Carnot* ont été données, entre autres, par *L. V. Turquan* [Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 437], par *A. Cayley* [Messenger math. (2) 14 (1884/5), p. 113; Papers 12, Cambridge 1897, p. 305] et par *J. J. Sylvester* [Messenger math. (2) 14 (1884/5), p. 192].

17) Comme cas le plus simple de figures corrélatives, il signale celui des figures semblables [Corrélation figures géom.[16]), p. 37]. Le mot *corrélation* désigne, d'après *L. N. M. Carnot* [id. p. 1], la relation qui lie une figure arbitraire à une figure particulière dont on connaît les propriétés.

*Il y a lieu d'observer que le terme *figures corrélatives* est adopté aujourd'hui dans un autre sens et désigne des figures qui se correspondent par voie de dualité [voir n° 5].*

18) C'est à lui également que l'on doit la notion de polygones complets à n sommets ou à n côtés.

19) *L. N. M. Carnot* [Corrélation figures géom.[16]), p. 118, 136, 163; Géom. de position[16]), p. 291, 297, 437] démontre ses propositions, dans le cas du triangle, par la trigonométrie, puis il les généralise en passant du cas de n côtés à celui de $n+1$. Des généralisations de ces théorèmes ont été données par *O. Terquem* [Nouv. Ann. math. (1) 10 (1851), p. 100].

Le théorème de Carnot peut être considéré comme un cas particulier du théorème d'Abel; c'est le cas particulier qui correspond à l'hypothèse où la courbe d'ordre n se décompose en n droites [cf. *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie, publ. par *F. Lindemann* 1, Leipzig 1876, p. 754, 829; trad. *Ad. Benoist* 3, Paris 1883, p. 120, 219].

courbe aux points P, P', P''; Q, Q', Q''; R, R', R'', on a

$$\frac{BP\cdot BP'\cdot BP''}{CP\cdot CP'\cdot CP''}+\frac{CQ\cdot CQ'\cdot CQ''}{AQ\cdot AQ'\cdot AQ''}+\frac{AR\cdot AR'\cdot AR''}{BR\cdot BR'\cdot BR''}=1.$$

Au début du 19ième siècle, les géomètres faisaient de ces relations un usage prépondérant, principalement dans la démonstration de propositions qui devaient être plus tard des applications naturelles des méthodes projectives[20]).

C'est ainsi que *M. Chasles*[21]) démontrait le premier l'existence, sur un hyperboloïde à une nappe, de deux systèmes de génératrices rectilignes, que *J. V. Poncelet*[22]) établissait le théorème de Pascal pour le cas particulier d'une conique réduite à deux droites, que *Ch. J. Brianchon*[23]) donnait un procédé de construction d'une conique définie par cinq points ou cinq tangentes; c'est encore de cette manière que l'on démontrait, soit la proposition connue sous le nom de *théorème de Desargues* [n° **13**], d'après laquelle un quadrilatère et une conique circonscrite tracent une involution sur une transversale quelconque, soit le théorème général, dit *théorème des quadrilatères inscrit et circonscrit à une conique*, lequel concerne les deux quadrilatères formés l'un par quatre points d'une conique, l'autre par les tangentes en ces points, et leurs éléments diagonaux, théorème dont l'importance est d'autant plus grande qu'il permet d'édifier la théorie des pôles et polaires[24]).

J. V. Poncelet[25]) a même appliqué cette théorie des transversales à la construction d'une cubique définie par des points donnés. Plus récemment, *P. Serret*[26]) l'a employée pour établir une série de propositions sur les points d'intersections de multiplicités algébriques.

20) On trouve, inversement, dans *A. Jacobi* [J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 53], une démonstration des théorèmes sur les transversales déduite des propriétés projectives.

21) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 440, 466 [1812].

22) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 90; (2e éd.) 1, p. 87.

23) Lignes du second ordre[13]).

24) Voir principalement *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5^2 (1896), Leipzig 1901, p. 23, 49.

25) Le travail de *J. V. Poncelet* sur ce sujet, intitulé: „Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques", contient une théorie complète des cubiques basée sur les propriétés des transversales [J. reine angew. Math. 8 (1832), p. 21, 117, 213, 370; Propriétés projectives[15]), (2e éd.) 2, p. 122, 316]; un extrait a été publié par l'auteur [Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 1 (1832), p. 9].

26) Voir principalement [Géométrie de direction, application des coordonnées polyédriques, Paris 1869, et par ex. C. R. Acad. sc. Paris 82 (1876), p. 270/2] la démonstration de ce fait que tout décagone gauche dont les côtés opposés se coupent deux à deux sur un même plan est inscriptible dans une quadrique.

Dans ces derniers temps, on a généralisé, à plusieurs reprises, les théorèmes de *L. N. M. Carnot.*

A. Gob[27]) a trouvé, pour une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, une proposition corrélative de celle qui concerne l'intersection d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre avec un triangle.

C. A. Laisant[28]) a cherché sous quelles conditions la réciproque du théorème de Carnot est exacte, c'est-à-dire dans quels cas, étant donnés un polygone et, sur chacun de ses côtés, n points satisfaisant à la relation de Carnot, on peut en conclure qu'il existe une ligne C_n d'ordre n passant par ces points. Il n'en est ainsi que dans le cas où le nombre de ces points surpasse d'une unité celui des points nécessaires pour définir une courbe algébrique d'ordre n, et ceci n'a lieu que sous ces deux conditions que le polygone soit un triangle et que n soit égal ou à 1 (auquel cas la ligne C_n est une droite), ou à 2 (auquel cas la ligne C_n est une conique).

La même question se pose dans l'espace pour une surface S_n d'ordre n passant par les points envisagés; elle admet alors *trois* solutions:

1°) celle du quadrilatère avec $n = 1$ (auquel cas la surface S_n est un plan),

2°) celle du pentagone avec $n = 2$ (auquel cas la surface S_n est une quadrique),

3°) et enfin celle du polygone de 14 côtés avec $n = 6$.

3. Le principe de continuité. En présence des progrès que *G. Monge* et *J. L. Lagrange* avaient fait faire à la géométrie analytique, du degré de perfectionnement où ils l'avaient amenée, c'était une nécessité pour les géomètres que de donner à leurs conceptions une généralité égale à celle obtenue, dans les méthodes analytiques, avec l'indétermination des coefficients. Le principe de continuité de *J. V. Poncelet* répondait entièrement à ce besoin, ce principe consistant dans l'affirmation que les résultats établis dans une démonstration sont indépendants d'une position accidentelle des éléments de la question, un *cas spécial* d'une figure devant être regardé comme une représentation suffisante de tous les cas, pourvu que cette figure soit dans un *état général de construction*, c'est-à-dire qu'elle ne satisfasse à aucune condition particulière de position[29]).

27) Assoc. fr. avanc. sc. 22 (Besançon) 1893², p. 258. Voir aussi *A. Cazamian*, Nouv. Ann. math. (3) 14 (1895), p. 30; *F. Ferrari*, id. p. 41.

28) Nouv. Ann. math. (3) 9 (1890), p. 5.

29) Voir, en partic. Propriétés projectives[15]), (1^re^ éd.) p. 55; (2^e^ éd.) 1, p. 54, 65/8, 218/9, 405/8 et préface, p. XII et suiv. *Voir aussi l'énoncé que donne *M. Chasles* du principe de continuité, Traité de géométrie supérieure, (1^re^ éd.) Paris 1852, p. XI; (2^e^ éd.), Paris 1880, p. XIII (préface, § V).*

Dans l'étude des coniques, *G. Desargues* avait déjà pressenti cette conception nouvelle en considérant le cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole, le système de deux droites, comme des variétés d'une même famille de courbes, les sections planes d'un cône à base circulaire. *I. Newton*[30]), de son côté, dans son étude des cubiques planes, avait eu des vues ayant le même caractère de généralité. Il en était de même enfin pour *L. N. M. Carnot* avec sa conception des *figures corrélatives*[31]). Mais c'est à *J. V. Poncelet* que revient le mérite d'avoir élevé cette conception à la hauteur d'un principe fondamental, et d'en avoir donné des applications systématiques s'étendant à des ensembles de faits jusque-là séparés. Aujourd'hui, le principe de continuité se trouve au fond de toute idée géométrique.

D'abord ce principe affirme, ainsi que l'avait déjà prévu *G. Desargues*, l'unité qui existe entre toutes les figures se déduisant les unes des autres par des *projections* ou des *sections planes*: de là découlent les conceptions de la *droite de l'infini* et du *plan de l'infini*[32]). En second lieu, il exprime qu'il y a une complète équivalence entre des figures qui se déduisent les unes des autres par une déformation continue, pourvu qu'elles satisfassent, dans leur nature et leurs propriétés, à certaines conditions générales; il est légitime, par exemple, d'établir

30) Enumeratio linearum tertii ordinis, *publié pour la première fois en appendice à la première édition anglaise du traité „Opticks", Londres 1704; Opera, éd. *S. Horsley* 1, Londres 1779, p. 531.*

31) Corrélation figures géom.[16]), p. 6, 37.

32) Propriétés projectives[15]), (1^re^ éd.) p. 50, 373; (2^e^ éd.) 1, p. 49, 361. Les analystes, au reste, n'avaient pas encore préparé la voie aux géomètres par l'introduction des racines infinies d'une équation et la notion de droite de l'infini; c'est ainsi, par exemple, que *J. D. Gergonne* [Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 219] s'en réfère à *J. V. Poncelet.* Voir aussi *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 8; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 131.

Ce n'est que beaucoup plus tard qu'est apparue cette conception rigoureuse que l'introduction des éléments à l'infini doit être justifiée, et qu'il est nécessaire, dans toute démonstration, d'établir qu'ils satisfont aux axiomes fondamentaux d'intersection. Elle est formulée, dans ses principes essentiels, par *K. G. Chr. von Staudt*, Geometrie der Lage, Nuremberg 1847, p. 23.

L'introduction de ces éléments impropres fait du plan projectif une surface *unilatère* [cf. III 6]. C'est ce que signale *L. Schläfli* dans une lettre adressée à *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 550. *W. Boy* [Diss. Göttingue 1901] a dressé le modèle d'une surface, entièrement finie, équivalente au plan projectif.

L'espace projectif jouit de propriétés analogues; il constitue une multiplicité ayant une connexion particulière [Voir l'article III 1 n^os^ **43** à **45**].

certaines propositions générales sur l'intersection de deux courbes algébriques de degrés respectivement égaux à m et à n en envisageant le cas particulier où elles se réduisent à des systèmes de m et de n droites[33]. En troisième lieu, et ceci est le point capital du principe, il justifie l'application générale des résultats et des méthodes aux cas dans lesquels la représentation analytique comporterait la présence de grandeurs imaginaires.

J. V. Poncelet limitait d'abord l'application de ce principe aux questions dans lesquelles les conclusions ne concernent que des éléments réels, les éléments imaginaires ne pouvant intervenir que dans les définitions ou démonstrations: il y arrivait en rattachant une définition pouvant comporter des imaginaires à des propriétés réelles choisies de façon qu'elles restent invariantes dans le passage, par voie de continuité, du réel à l'imaginaire [cf. nº **19**]. Mais ensuite, poursuivant les applications du principe, *J.V.Poncelet* se trouve conduit bien plus loin: c'est ainsi qu'il arrive à opérer avec des projections imaginaires[34], lorsqu'il envisage deux coniques sécantes comme étant les projections de deux coniques non sécantes, cherchant ici encore ce qui reste invariable dans le passage d'un cas à l'autre. C'est par ce procédé qu'il découvre l'existence des *ombilics* ou *points cycliques imaginaires* de l'infini; et cette notion, dont la complète signification, déduite de sa nature essentiellement analytique et métrique, ne devait apparaître cependant que beaucoup plus tard, prend aussitôt une importance fondamentale dans toutes les recherches géométriques[35].

J. V. Poncelet regarde ces points comme étant les points communs à tous les cercles du plan; il reconnaît que deux cercles concentriques sont bitangents en ces points[36], que toutes les coniques ayant un foyer commun ont deux tangentes communes joignant ce foyer aux

33) Propriétés projectives[15], (1re éd.) p. 330, 384; (2e éd.) 1, 319/21, 373/4. Pour plus de détails sur l'application de ce principe à des théorèmes d'intersection analogues, voir l'article III 4.

34) Propriétés projectives[15], (1re éd.) p. 68; (2e éd.) 1, p. 67.

35) A la vérité, *J. V. Poncelet* ne raisonne le plus souvent que sur les deux points imaginaires que deux cercles ont en commun à l'infini; mais cette conséquence qui en résulte naturellement, l'existence de deux points fixes imaginaires par lesquels passent tous les cercles du plan, est néanmoins énoncée en un passage de son traité [Propriétés projectives[15], (1re éd.) p. 49; (2e éd.) 1, p. 48]: „Des cercles placés arbitrairement sur un plan ne sont donc pas tout à fait indépendants entre eux, comme on pourrait le croire au premier abord; ils ont idéalement deux points imaginaires communs à l'infini . . .“

36) Voir, principalement, Propriétés projectives[15], (1re éd.) p. 48; (2e éd.) 1, p. 47/8.

ombilics du plan[37] [cf. III **17**, **15**]. Puis, passant à l'espace, il ajoute un chapitre entièrement nouveau à la géométrie projective: il arrive d'abord à cette conception toute nouvelle qu'une quadrique possède toujours deux systèmes de génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires[38]. Puis, il étend les propriétés de deux sphères à deux quadriques quelconques dont l'intersection se décompose en deux coniques, démontre ensuite que toute quadrique possède six systèmes de sections circulaires dont deux seulement sont réels[39], et découvre enfin l'existence de l'*ombilicale* [cf. III 22, **10**], au sujet de laquelle il constate qu'elle est la courbe de contact de deux sphères concentriques[40].

Méthodes et notions générales.

4. Poncelet, créateur de la géométrie projective. C'est *J. V. Poncelet*, avec son „Traité des propriétés projectives des figures[41]“ qu'il faut regarder comme le créateur de la géométrie projective. En principe, son but capital, en écrivant son Traité, était de ramener toute proposition concernant les coniques ou les quadriques à une proposition relative à la circonférence ou à la sphère, et cela à l'aide de projections convenables ou d'applications du principe de continuité. Mais le fait de chercher d'abord, pour y arriver, quelles sont, parmi les propriétés d'une figure géométrique, celles qui se conservent en projection, de se poser ainsi un problème d'une importance aujourd'hui fondamentale, donne à sa méthode une portée beaucoup plus profonde et lui attribue un rôle capital dans le développement des idées modernes.

J. V. Poncelet constate d'abord que les propriétés, dites projectives, ne comprennent pas seulement des propriétés dites *de position* (ou *descriptives*), mais encore des propriétés *métriques*[42].

37) Propriétés projectives[15], (1re éd.) p. 260; (2e éd.) 1, p. 252/3.

38) Id. (1re éd.) p. 381; (2e éd.) 1, p. 370/1.

39) Id. (1re éd.) p. 399; (2e éd.) 1, p. 390.

J. V. Poncelet découvre les sections circulaires d'une quadrique en considérant les coniques d'intersection d'une sphère et d'une quadrique avec le plan de l'infini, et en remarquant que tout plan mené par une corde commune à ces deux coniques coupe la sphère et la quadrique suivant des courbes semblables.

40) Propriétés projectives[15], (1re éd.) p. 404; (2e éd.) 1, p. 396/8. L'existence de l'ombilicale (cercle imaginaire de l'infini) paraît d'ailleurs ici être un résultat accidentel.

41) Les idées exposées dans ce traité datent de 1813, époque pendant laquelle *J. V. Poncelet* était retenu en Russie comme prisonnier de guerre. „Cet ouvrage, dit-il dans les premières pages de son Traité, est le résultat des recherches que j'ai entreprises, dès le printemps de 1813, dans les prisons de la Russie.“

42) La distinction entre propriétés métriques et propriétés projectives était en

L'une de ces dernières, qu'il met en évidence, possède un grand caractère de généralité: c'est celle qui s'exprime par une relation ou un rapport entre deux produits de segments linéaires, relation ou rapport formé de telle façon que ses deux termes comprennent chacun une même lettre le même nombre de fois et que chaque segment appartenant à l'un de ces deux termes soit parallèle à un segment appartenant à l'autre[43]). Cette propriété générale établit, en particulier, le caractère projectif soit de la division harmonique et du rapport anharmonique[44]), soit des équations de l'involution et de leurs applications au quadrilatère inscrit dans une conique, soit enfin des propositions de la théorie des transversales et de la théorie des pôles et polaires.

Poussant plus avant ses recherches, *J. V. Poncelet* introduit ensuite la notion de perspective entre deux plans ou deux espaces qui coïncident *et celle de *figures homologiques**; il y est conduit par l'étude des relations de similitude entre deux circonférences (ou deux sphères), pour lesquelles la droite de l'infini (ou le plan de l'infini) constitue un axe d'homologie (ou un plan d'homologie), le centre d'homologie étant un des centres de similitude de ces deux circonférences (ou de ces deux sphères). Il arrive ainsi à regarder deux coniques d'un même plan comme étant deux figures homologiques, l'axe d'homologie étant une de leurs sécantes communes et le centre d'homologie le point d'intersection de deux de leurs tangentes communes[45]): c'est, en particulier,

général adoptée au début du 19ième siècle. On cherchait en particulier à établir sur de pures relations de situation la partie de la géométrie qui ne concerne aucune propriété métrique: c'est ainsi que *J. D. Gergonne* [Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 209] *dans un article intitulé: considérations sur la science de l'étendue, déclare que «bien que très souvent on déduise ces propriétés de *situation* des proportions et du calcul, on peut toujours, en s'y prenant d'une manière convenable, les en dégager complétement».*

43) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 7 et suiv.; (2e éd.) 1, p. 7 et suiv.: et principalement (1re éd.) p. 11; (2e éd.) 1, p. 11/2.

44) On trouve des exemples de relations métriques entre n points, ayant un caractère projectif, dans un article de *O. Terquem* [Nouv. Ann. math. (1) 6 (1847), p. 68] *article où l'on rencontre pour la première fois le terme *rapport projectif*, pour désigner un rapport anharmonique. Voir n° 7.*

45) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 156 et suiv.; (2e éd.) 1, p. 151 et suiv.

Émile Weyr [Sitzgsb. Akad. Wien 57 II (1868), p. 449] a discuté de quelles manières on peut associer les points d'intersection de deux coniques et leurs tangentes communes pour former le centre et l'axe d'homologie de ces deux coniques. *A. Larmor* [Quart. J. pure appl. math. 21 (1886), p. 339] a également discuté ce problème.

dans cette voie qu'il découvre que toutes les coniques ayant un foyer commun admettent deux tangentes communes imaginaires[46]).

Ces considérations, étendues à l'espace, donnent ce que *J. V. Poncelet* appelle la *perspective-relief*; une quadrique quelconque peut alors être envisagée comme la perspective-relief ou figure homologique d'une sphère; de là les propriétés des quadriques ayant une conique commune. Puis, remarquant que deux quadriques homologiques coupent le plan d'homologie suivant la même conique, *J. V. Poncelet*[47]) s'élève à la conception de *l'ombilicale* (*cercle imaginaire de l'infini*); il en déduit que deux quadriques semblables et semblablement placées peuvent toujours être considérées comme les perspectives-relief de deux sphères, ainsi que d'autres propositions projectives intéressantes.

5. Polarité, réciprocité et dualité. C'est *Ph. de La Hire* qui semble avoir découvert le premier les caractères principaux de la polarité[48]) dans les coniques et avoir distingué parmi eux les caractères purement descriptifs des caractères métriques, les premiers s'exprimant par des relations de position entre les tangentes à la courbe, et les autres par des proportions harmoniques; la méthode de *Ph. de La Hire*[49]) consistait à étendre aux coniques, par voie de projection, des propositions analogues, déjà connues des Grecs, sur la circonférence de cercle.

Quant aux théorèmes sur les quadrilatères inscrits et circonscrits à une conique [n° 2], on les trouve énoncés pour la première fois dans les travaux de *C. Maclaurin*[50]).

46) Voir aussi *M. Chasles*, Correspondance math. phys. (de *A. Quetelet*) 5 (1829), p. 18.

47) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 381, 404/8; (2e éd.) 1, p. 370, 396/400.

48) Le terme de „pôle" est employé pour la première fois par *F. J. Servois*, Ann. math. pures appl. 1 (1810/1), p. 337, *à propos du problème de la construction, avec la règle seulement, d'un triangle circonscrit à une conique et ayant ses sommets placés sur trois droites données.* Le terme de „polaire" est employé par *J. D. Gergonne* [Ann. math. pures appl. 3 (1812/3), p. 293] *dans une théorie analytique des pôles des lignes et surfaces du second ordre*.

49) Sectiones conicae[6]); cf. *M. Chasles*, Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 122 et suiv.

50) De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus, p. 31. Cet ouvrage ne fut publié qu'après la mort de *C. Maclaurin*, comme appendice à son Algèbre [A treatise of algebra, Londres 1748].

Le théorème sur les quadrilatères, l'un inscrit l'autre circonscrit à une conique, sans la propriété de leurs diagonales, se trouve déjà énoncé dans les œuvres de *R. Simson*, Sectionum conicarum libri quinque, Edimbourg 1735, p. 197; voir *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), Leipzig 1901, p. 33, 50.

Mais ce n'est qu'au début du 19ième siècle que l'on attache une importance capitale à établir les propriétés des pôles et polaires par rapport aux coniques; nombreuses sont les démonstrations que l'on en donne et qui reposent tantôt sur le théorème de Pascal, tantôt sur la théorie des transversales, tantôt sur le théorème des quadrilatères, tantôt sur l'involution[51]).

Les propriétés analogues concernant les quadriques sont dues à *G. Monge*[52]) qui les découvre par voie analytique et les expose d'abord dans ses leçons professées à l'École polytechnique. Puis *Ch. J. Brianchon*[53]) en donne le premier une démonstration géométrique, en ne faisant intervenir, en dehors des relations de polarité dans les coniques, que les propriétés de triangles placés en perspective dans l'espace.

C'est aussi *Ch. J. Brianchon* qui constate que la polarité peut servir à transformer des propositions déjà connues[54]); il en donne un exemple en déduisant le théorème qui porte aujourd'hui son nom de la propriété de l'hexagone de Pascal. Mais ce n'est que quelques années plus tard que *J. V. Poncelet*[55]) met en évidence toute la puissance de la méthode; partant d'abord de la figure polaire réciproque d'un hexagone, il passe à celle d'un polygone quelconque pour s'élever ensuite à celle d'une courbe plane quelconque; il constate la *relation de réciprocité* qui existe entre deux courbes polaires réciproques, et établit en particulier que la figure formée par un point de la première courbe et la tangente en ce point correspond sur l'autre courbe à la figure formée par une tangente et son point de contact. C'est sur ce fait que repose sa *méthode des polaires réciproques*.

J. V. Poncelet montre ainsi qu'une courbe plane peut être envisagée sous deux points de vue différents et regardée comme formée soit par un ensemble de points soit par un ensemble de tangentes[56]); il en déduit que les singularités d'une courbe se correspondent deux à deux[57]), chacune étant la réciproque de l'autre; il s'élève enfin jusqu'à cette idée générale que toute proposition descriptive concernant des points et des droites peut se transformer par voie de réciprocité.

L'étude de la polarité dans les quadriques le conduit à étendre à l'espace cette loi de réciprocité, et à définir une correspondance analogue dans laquelle une surface réglée correspond à une autre surface réglée, tandis qu'une courbe gauche avec l'ensemble de ses points, de ses tangentes, et de ses plans osculateurs correspond à une surface développable avec l'ensemble de ses plans tangents, de ses génératrices, et des points de son arête de rebroussement[58]).

Les premiers résultats de *J. V. Poncelet*, sa découverte des figures polaires réciproques par rapport aux coniques et aux quadriques, furent aussitôt signalés par *J. D. Gergonne*[59]) comme étant des exemples particuliers, entre plusieurs autres, de la loi générale *de*

51) **L. N. M. Carnot* donne deux démonstrations, la première [Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points de l'espace, Paris 1806, p. 190] s'appuie sur la théorie des transversales, la seconde [Géom. de position[16]), p. 254] s'appuie sur les propriétés des quadrilatères. *M. Chasles* [Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 11] a donné une démonstration reposant sur la théorie des transversales. Enfin *Ch. J. Brianchon* [Lignes du second ordre[18]), p. 12] invoque la théorie des transversales et l'involution.*

52) Ces propriétés, connues des élèves de *G. Monge*, ont été immédiatement développées par ceux-ci dans toute une série de propositions isolées. On les voit également occupés à rechercher la surface enveloppée par un plan dont le pôle décrit certaines courbes ou surfaces; ils constatent en particulier qu'une courbe gauche correspond à une surface développable. *Voir, par exemple, *Th. Olivier*, Mémoire sur les polaires*, Bull. sc. math. astron. phys. chim. 11 (1829), p. 1. Pour plus de détails, voir l'article III 22.

53) J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 297.

54) Cette idée se trouve déjà dans *D. Encontre* [Ann. math. pures appl. 1 (1810/1), p. 122] et *J. de Stainville* [id. p. 190], *appliquée à la construction d'un polygone de m côtés circonscrit à une circonférence, ayant ses sommets sur m droites données, problème dont les auteurs ramènent la solution à celle du problème réciproque.*

55) Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques [J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 1]. Ce travail avait été présenté, en 1824, à l'Académie des sciences de Paris; *une analyse en est donnée par l'auteur [Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 265].*

56) L'expression „classe" d'une courbe est due à *J. D. Gergonne* [Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 151].

57) Cette question avait déjà été effleurée par *J. V. Poncelet* [Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 124; (2e éd.) 1, p. 119]. Voir, pour plus de détails, l'article III 19.

58) Il existe, dans deux figures polaires réciproques, des éléments homologues qui, en même temps, se correspondent aussi l'un à l'autre dans certaines transformations homographiques; mais ces éléments ne sont jamais que des coniques ou quadriques. C'est ce qui a été établi, pour les premières, par *M. d'Ocagne* [Bull. Soc. math. France 13 (1884/5), p. 204] et, pour les secondes, par *G. Fouret* [id. 14 (1885/6), p. 18]. Voir, également, à ce sujet, *A. del Re*, Rend. Circ. mat. Palermo 2 (1888), p. 37.

59) *J. D. Gergonne* développe ses idées dans deux articles [Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 209; 18 (1827/8), p. 149]; *le premier est intitulé „considérations sur la science de l'étendue"*; le second est consacré à quelques théorèmes sur les courbes algébriques. Le premier de ces articles suscita entre *J. D. Gergonne* et *J. V. Poncelet* une polémique assez vive au sujet de la signification des deux principes, de la situation de l'un par rapport à l'autre, et de leur puissance. Cette discussion, qui fait l'objet de plusieurs articles [Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 272; 18 (1827/8), p. 125] est reproduite, dans ses parties essentielles, par *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[15]), (2e éd.) 2, p. 351.

dualité, «d'après laquelle tout phénomène de l'étendue présente toujours un double caractère.»

*Un premier exemple de cette loi, celui des triangles sphériques supplémentaires, avait été déjà rencontré, deux siècles auparavant, par *F. Viète*[60]) d'abord, sous une forme incomplète, puis, sous sa forme définitive, par *W. Snellius*[61]).*

**Sorlin*[62]), contemporain de *J. V. Poncelet* et de *J. D. Gergonne* reprend et développe cet exemple en signalant, en trigonométrie sphérique, une série de propositions deux à deux parallèles.*

La conception de *J. D. Gergonne,* à qui est dû d'ailleurs le mot de *dualité,* se forme peu à peu dans divers articles du journal qu'il avait fondé, soit à l'occasion de problèmes de géométrie qu'il propose à ses lecteurs[63]), soit dans des recherches sur les polyèdres[64]), soit dans l'étude des courbes et surfaces algébriques. Dans tous ces articles, la dualité se manifeste nettement par le parallélisme des propositions et de leurs démonstrations; l'auteur la met en évidence en employant le premier le système des „doubles colonnes“ qui devait être si souvent utilisé depuis.

J. D. Gergonne arrive ainsi à voir dans la dualité une *loi générale* de l'étendue permettant de transformer toute proposition, de telle façon que, à la géométrie ordinaire où le point est l'élément fondamental, en correspond une seconde dans laquelle l'élément fondamental est la droite, pour la géométrie plane, ou le plan, pour la géométrie de l'espace. Il donne à cette loi le caractère d'un *axiome,* mais ajoute cependant que sa légitimité peut être considérée comme une conséquence de la méthode des polaires réciproques de *J. V. Poncelet.*

*Ce point devait d'ailleurs être établi quelques années plus tard, par des méthodes analytiques basées sur l'analogie des représentations

Ce n'est, au reste, qu'après cette polémique que, dans son second article, *J. D. Gergonne* précise nettement les notions d'ordre et de classe d'une courbe.

60) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII, Tours 1593; Opera, éd. *F. van Schooten,* Leyde 1646, p. 426; cf. *A. von Braunmühl,* Bibl. math. (2) 12 (1898), p. 65/72.*

61) *Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor (traité posth.), Leyde 1627, p. 120 (livre 3, prop. 8).*

62) Ann. math. pures appl. 15 (1824/5), p. 273.

63) Ann. math. pures appl. 11 (1820/1), p. 326; 12 (1821/2), p. 69; *il s'agit, dans ces questions, de propriétés réciproques concernant des combinaisons de points et de droites, et dont l'une avait déjà été énoncée par *G. Coriolis.**

64) *J. D. Gergonne,* Ann. math. pures appl. 9 (1818/9), p. 321; 15 (1824/5), p. 157. *Le premier de ces deux articles est signé par un abonné, dont l'anonyme cache la personnalité de *J. D. Gergonne* lui-même;* c'est dans le second que se trouve employé pour la première fois le sytème des „doubles colonnes“.

analytiques du point et de la droite, par *A. F. Möbius*[65]) et par *J. Plücker*[66]) en Allemagne, par *M. Chasles*[67]) en France*.

Mais l'importance capitale du principe de dualité tient à ce qu'il dépasse en généralité et en puissance la méthode des polaires réciproques; si nous savons donner aujourd'hui à nos pensées une tournure projective et dualistique, nous le devons à *J. V. Poncelet* et à *J. D. Gergonne,* et autant à l'un qu'à l'autre.

C'est *J. V. Poncelet*[68]) également qui fait les premières applications de la réciprocité à la transformation des propriétés métriques en prenant comme figure directrice la circonférence ou la sphère:

C'est ainsi qu'il établit les propriétés des coniques homofocales en montrant qu'elles sont réciproques des propriétés d'un système de cercles dans le plan[69]).

Dans sa polémique célèbre avec *J. D. Gergonne,* il tirait argument de cette considération pour affirmer la supériorité de la méthode des polaires réciproques sur le principe général de dualité[70]).

De son côté *M. Chasles*[71]) a employé la parabole ou le paraboloïde pour la transformation de propriétés métriques; plus tard encore, *A. Mannheim*[72]), reprenant la circonférence et la sphère comme figures

65) *Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, p 436/7; Werke 1, Leipzig 1885, p. 372/4.*

66) *Analytisch-geometrische Entwickelungen 2, Essen 1831.*

67) *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie, Bruxelles 1837, [publié à la suite de l'Aperçu historique [1])]; (2e éd.) Paris 1875, p. 575 et suiv.*

68) J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 51; *J. V. Poncelet,* dans ce mémoire, transforme des relations segmentaires en relations angulaires entre des sinus.

69) *Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 265: ce mémoire est une analyse du précédent. *J. V. Poncelet* y indique aussi que les propriétés des quadriques de révolution sont réciproques des propriétés de la sphère. *E. Bobillier* [Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 185] et *M. Chasles* [id. p. 270] reprennent et développent ces considérations.*

Voir aussi *J. V. Poncelet,* Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 1 (1832), p. 118; Bull. sc. math. astr. phys. chim. 8 (1827), p. 109; id. 9 (1828), p. 292.

70) Bull. sc. math. astr. phys. chim. 8 (1827), p. 109. D'ailleurs *J. D. Gergonne* n'avait parlé du principe de dualité qu'à propos de propriétés de „situation“.

71) Correspondance math. phys. (de *A. Quetelet*) 5 (1829), p. 281; id. 6 (1830), p. 1. Voir aussi *J. V. Poncelet,* Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 1 (1832), p. 118, 141. *M. Chasles* [Aperçu hist. [1]), (2e éd.) p. 226] a employé une sphère imaginaire comme quadrique directrice.

72) *A. Mannheim* [J. math. pures appl. (2) 11 (1866), p. 193] transforme en particulier la relation d'Euler sur la courbure d'une section plane normale d'une surface.

directrices, a établi des relations métriques entre les courbures de deux courbes réciproques.

6. La notion générale de correspondance. *L'idée d'établir une correspondance point par point entre deux figures date d'une époque reculée; la méthode qui consiste à faire croître dans un même rapport les ordonnées des points d'une figure en constitue un premier exemple: c'est le procédé suivi pour former l'ellipse à l'aide d'une circonférence, procédé déjà employé par le peintre *A. Dürer*[73]), puis étudié par *S. Stevin*[74]) et *Cl. Mydorge*[75]). Dans la suite, *Grégoire de Saint Vincent*[76]) étendit la méthode en la complétant par le balancement des ordonnées autour de leurs pieds.* Dans leurs travaux sur les coniques, *I. Newton*[77]), *Ph. de La Hire*[78]), *et *J. F. Le Poivre*[79])* ont fait usage de la correspondance ponctuelle que l'on obtient en rabattant l'un sur l'autre, autour de leur droite d'intersection, deux plans en perspective.

*C'est précisément la correspondance que devait retrouver plus tard *J. V. Poncelet*, pour ce cas particulier des figures planes, dans sa théorie des *figures homologiques*[80]).*

Ce mémoire constitue l'application, à un exemple particulier et important, d'une méthode générale développée précédemment dans un ouvrage du même auteur [*A. Mannheim*, Transformations des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques, Paris 1857], *cette méthode générale permettant de transformer une relation métrique quelconque.*

Plus récemment, *L. Ripert* [Nouv. Ann. math. (3) 17 (1898), p. 446; 18 (1899), p. 101, 306] a approfondi l'application de la dualité à la transformation des propriétés métriques, *en déduisant d'abord de toute propriété de la géométrie plane la propriété corrélative de la géométrie plane, puis en transformant à nouveau ces deux propriétés en deux autres, dans la géométrie autour du point corrélatif du plan de la première figure.*

73) *Hierinnen sind begriffen vier Bücher von menschlicher Proportion (œuvre posth.) Nuremberg 1528; Opera, Institutiones geometricarum libri quatuor, Arnhem 1603; Les quatre livres d'*Albert Dürer*, de la proportion des parties et pourtraits des corps humains, traduits par *L. Meigret*, Paris 1557; livre 1.*

74) **S. Stevin*, Œuvres math., éd. *A. Girard* 2, Leyde 1634, p. 348.*

75) *Le traité des sections coniques de *Cl. Mydorge* [*Cl. Midorgii* prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum] a paru en trois éditions: (1re éd.) Paris 1631, contenant les deux premiers livres du traité; (2e éd.) Paris 1639, contenant de plus les deux derniers livres; (3e éd.) Paris 1660.*

76) *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, Anvers 1647, p. 332.*

77) Voir, sur ce point, *C. Juel*, Nyt Tidsskrift math. Köbenhavn (Copenhague) 2 (1891), B. p. 3/6.

78) Nouvelle méthode en géométrie[6]), p. 75.

79) *Sections du cylindre[7]), p. 31.*

80) *Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 156; (2e éd.) 1, p. 151.*

C'est aussi à propos de l'étude des coniques que *G. Walker*[81]) emploie une correspondance qui n'est pas autre chose qu'une transformation homographique d'un plan, cette correspondance étant déterminée en définissant chaque point par l'intersection de deux rayons appartenant chacun à un faisceau de droites, puis en établissant une correspondance homographique entre ces faisceaux.

L. Euler[82]) signale également, comme procédé de transformation point par point des figures, *la méthode consistant à faire croître, dans des rapports constants, les diverses coordonnées des points d'une figure*; il appelle *figures affines* (lineae affines) celles qui se déduisent l'une de l'autre par ce procédé appelé *affinité*.

Vers 1800, la notion de transformation géométrique semble être d'un usage courant; on emploie principalement, soit les diverses méthodes que nous venons de rappeler, soit le procédé qui consiste dans la rotation d'un système d'axes de coordonnées, *soit encore la transformation d'une figure en une figure homothétique*, soit enfin des combinaisons de ces diverses méthodes[83]).

A. F. Möbius[84]) *et *M. Chasles** devaient *simultanément[85])* coor-

81) Sur *G. Walker* et son ouvrage [A treatise on conic sections, Londres 1794] cf. *C. Taylor*, Quart. J. pure appl. math. 14 (1877), p. 25.

82) Introductio in analysin infinitorum 2, Lausanne 1748, p. 239; trad. *J. B. Labey*, Introduction à l'analyse infinitésimale 2, Paris an V, p. 236. *Le fait qu'un cercle puisse être ainsi transformé en une ellipse était déjà connu d'*Archimède* [περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων, prop. 4; Opera, éd. *J. L. Heiberg*, (2e éd.) 1, Leipzig 1910, p. 276] (Note de *G. Eneström*).*

A. F. Möbius [Der baryc. Calcul[65]), p. 194; Werke 1, p. 180], s'autorisant de l'exemple de *L. Euler*, introduit les expressions *affinité* (Affinität) et *figures affines* (affine Figuren).

83) Voir par exemple [Bull. sc. math. astr. phys. chim. 1 (1822), p. 5] le compte-rendu du Traité des propriétés projectives de *J. V. Poncelet*, ainsi que ce dernier ouvrage[15]), (1re éd.), introduction p. XXXII; (2e éd.) 1, introd. p. XXI.

Dans cet ordre d'idées, citons l'exemple de *M. Chasles* qui, par une transformation affine, étend à l'ellipsoïde des propositions relatives à la sphère. Il emploie aussi [J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 388] certaines transformations particulières qui conduisent à des transformations homographiques. Enfin *M. Chasles* [Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 223] indique plusieurs méthodes de transformation, toutes équivalentes à la transformation corrélative (ou réciproque).

84) *A. F. Möbius* était conduit à l'idée générale de la transformation homographique [qu'il appelle *collinéation*] en constatant que le triangle fondamental de ses coordonnées barycentriques n'intervient pas dans un grand nombre de résultats, et que par suite les mêmes coordonnées peuvent se rapporter à différents triangles. Dans un mémoire particulier [J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 101; Werke 1, Leipzig 1885, p. 449], il expose ensuite les lois générales de la collinéation, *sous une forme indépendante des notations du calcul barycentrique.*

85) *Entre les travaux de *A. F. Möbius* et ceux de *M. Chasles*, la priorité

donner ces diverses notions en les rattachant à une idée générale, objet pour eux d'une étude particulière. *Leur but commun* était de chercher la transformation la plus générale qui comprenne comme cas particuliers l'égalité, la similitude et l'affinité des figures. *Leur résultat commun* est que cette transformation est celle qui, à des points situés sur une même droite ou dans un même plan, fait correspondre des points situés également sur une même droite ou dans un même plan; *A. F. Möbius* l'appelle *collinéation*, *et *M. Chasles* désigne sous le nom de *figures homographiques* celles qui se déduisent l'une de l'autre par cette transformation[86].* *Tous deux* montrent principalement qu'une *transformation homographique* (ou *collinéation*) est définie dans le plan par quatre couples de points homologues, par cinq couples dans l'espace, ces points étant placés dans une position générale[87]).

La démonstration de *A F. Möbius* repose sur ce qu'il appelle *construction par réseau* (*Netzkonstruktion*). Si, en effet, partant de quatre points d'un plan, on en déduit d'autres se succédant en nombre illimité, soit en les joignant deux à deux par une droite, soit en prenant l'intersection de deux de ces droites, l'ensemble formé par les points ainsi obtenus est dense[88]) dans toute l'étendue du plan; les mêmes opérations, effectuées ensuite dans un second plan, en partant

appartient incontestablement à ceux du premier: son ouvrage magistral, „Der barycentrische Calcul", date de 1827. Le mémoire de *M. Chasles* est présenté en 1829 à l'Académie de Bruxelles et paraît seulement en 1837 dans la première édition de l'Aperçu historique[1]). Mais *M. Chasles* semble ignorer les travaux de *A. F. Möbius*, aussi bien que ceux de *J. Plücker*, déjà signalés les uns et les autres à propos de la dualité [cf. notes 65, 66], aussi bien que ceux de *J. Steiner*, dont nous parlerons plus loin [n° 8]. *M. Chasles* ne connaît leur existence que de nom, et avoue son ignorance en disant à leur sujet [Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 215]: „Nous éprouvons un vif regret de ne pouvoir citer ici leurs ouvrages, par suite de notre ignorance de la langue dans laquelle ils sont écrits."*

86) Les formules analytiques représentant une transformation homographique se rencontrent déjà dans *E. Waring* *[Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et de curvarum proprietatibus, Cambridge 1762, p. 82; Proprietates curvarum algebraicarum, Cambridge 1772, p. 25]* qui les obtient en généralisant des formules obtenues par *I. Newton* [Philosophiae naturalis principia mathematica, Londres 1687, livre 1, lemme 22; (2e éd.) Cambridge 1713, p. 79/81; Opera, éd. *S. Horsley* 2, Londres 1779, p. 108; trad. par *G. E. de Breteuil*, marquise *du Châtelet* 1, Paris 1759, p. 99] dans l'étude d'un cas particulier; il en déduit que, dans cette transformation, le degré d'une courbe se conserve. Cf. *M. Chasles*, Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 218 en note.

87) On entend par là des points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite, ni quatre quelconques dans un même plan.

88) On dit qu'un ensemble de points est dense dans toute l'étendue d'un domaine lorsque chaque circonférence contenue dans ce domaine, si petite qu'elle soit, entoure toujours un point au moins de l'ensemble et par suite une infinité.

de quatre points de celui-ci, donnent, dans ce second plan, un second ensemble qui correspond point par point au premier. *A. F. Möbius* tenait cette démonstration pour suffisante. Mais, dans une conception plus rigoureuse, elle doit, pour être complète, faire intervenir en outre la notion de *point-limite*, à l'aide de laquelle on peut alors définir le point qui correspond à un point ne faisant pas partie de l'ensemble ainsi défini [pour plus de détails, cf. n° **17**].

M. Chasles* établit l'existence des figures homographiques par deux procédés différents. Dans le premier[89]), de nature analytique, il regarde cette existence comme une conséquence du principe de dualité, deux figures homographiques étant simplement deux figures corrélatives d'une même troisième; et il insiste surtout sur l'égalité des rapports anharmoniques [n° **7] d'éléments homologues des deux figures. C'est cette propriété qui sert de base à sa seconde démonstration[90]); en envisageant par exemple le cas des figures planes, il définit deux figures homographiques, en partant de quatre couples de points homologues, arbitrairement choisis, A, A'; B, B'; C, C'; D, D', et en prenant comme points homologues M et M', deux points tels que les faisceaux $A(BCDM)$, $B(ACDM)$ aient respectivement même rapport anharmonique que les faisceaux $A'(B'C'D'M')$ et $B'(A'C'D'M')$.*

C'est à *A. F. Möbius* que l'on doit la première démonstration de ce fait que deux plans en correspondance homographique peuvent toujours être placés en perspective[91]), *propriété que *M. Chasles* devait également rencontrer plus tard par application de sa méthode[92]).*

Aux travaux de *A. F. Möbius* se rattachent ceux de *L. I. Magnus*[93]) qui recherche toutes les correspondances ponctuelles biunivoques. En dehors de la collinéation il obtient la correspondance quadratique que, par erreur, il regarde comme la transformation la plus générale cherchée [cf. n° **26**].

7. Le rapport anharmonique. Si l'on envisage quatre points A, B, C, D d'une même droite, on représente par la notation $(ABCD)$ le rapport

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \times BD}{BC \times AD} = (ABCD).$$

89) *Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 695.*

90) *Dans le préambule de son Aperçu historique[1]), *M. Chasles* indique les idées fondamentales sur lesquelles reposent les deux démonstrations. Puis, dans cet ouvrage, il ne développe que la première, et ce n'est que beaucoup plus tard [Géom. sup.[29]), (1re éd.) p. 362], qu'il expose ensuite la seconde.*

91) Der baryc. Calcul[65]), p. 320/8; Werke 1, p. 281 [cf. n° **9**].

92) *Géom. sup.[29]), (1re éd.) p. 409; (2e éd.) p. 379.* Cette propriété ne s'étend pas à l'espace [voir n° **9**].

93) J. reine angew. Math. 8 (1832), p. 52.

En Allemagne, depuis *A. F. Möbius*[94]), on désigne ce rapport sous le nom de *double rapport.*

Plus tard *M. Chasles,* remarquant que, dans le cas où il est égal à -1, ce rapport était déjà connu sous le nom de rapport harmonique, l'a appelé rapport anharmonique[95]); *il conviendrait peut-être de substituer à cette expression qui prête à ambiguïté un terme plus correct, celui de *rapport projectif* par exemple[96]).*

De même, quatre droites a, b, c, d d'un même plan, issues d'un même point de ce plan, ainsi que quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, menés par une même droite, possèdent un *rapport anharmonique* que l'on représente par la notation

$$(abcd) \text{ ou } (\alpha\beta\gamma\delta)$$

et dont la valeur s'exprime, comme la précédente, à l'aide des sinus des angles formés par ces droites ou ces plans, de la façon suivante:

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}.$$

La proposition fondamentale de la géométrie projective exprime que dans un plan quatre droites concourantes ont le même rapport anharmonique que leurs quatre points d'intersection avec une transversale quelconque; elle établit ainsi le caractère projectif de ce rapport [n° 4]. Cette proposition remonte à *Pappus*[97]) *qui l'a énoncée sous des formes diverses; depuis, elle a été utilisée par *B. Pascal*[98]), par *G. Desargues*[99]) et par *R. Simson*[100]); puis elle a été également

94) Der baryc. Calcul[65]), p. 243 et suiv.; Werke 1, p. 219 et suiv.; voir aussi J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 101; Werke 1, p. 455. *A. F. Möbius* emploie d'ailleurs l'expression *rapport de double section* („Doppelschnittverhältniss") et non celle de *double rapport* („Doppelverhältniss"). En anglais on dit *cross-ratio* ou *anharmonic-ratio* et en italien *birapporto.*

95) Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 35/6. Sur le rapport anharmonique de quatre points d'un plan, voir n° 8.

96) *Cette expression a été employée par *O. Terquem* [Nouv. Ann. math. (1) 6 (1847), p. 68/74].*

97) Cette proposition forme la 129ième proposition du 7ième livre des Collections mathématiques de *Pappus*; elle figure parmi les lemmes destinés à faciliter la lecture des porismes d'*Euclide.* Voir *Pappus*, *Συναγωγὴ μαθηματική*, éd. *F. Hultsch* 2, Berlin 1877, p. 872/3.

98) **B. Pascal,* Essay pour les coniques[5]); Œuvres, éd. *L. Brunschvicg* et *P. Boutroux* 1, Paris 1908, p. 255.*

99) *Cf. *A. Bosse,* Manière universelle de Desargues[3]), p. 336; cf. Œuvres[4]), éd. *N. G. Poudra* 1, p. 152.*

100) **R. Simson,* De porismatibus tractatus, prop. XVII, Opera quaedam reliqua, Glasgow 1776, p. 380.*

énoncée par *Ch. J. Brianchon*[101]) et par *J. V. Poncelet*[102]), mais tous deux n'en ont fait qu'un usage restreint[103]).*

C'est à **M. Chasles** et à *A. F. Möbius* que l'on doit d'avoir signalé les premiers l'importance du rapport anharmonique et d'en avoir donné la discussion théorique. *A. F. Möbius* fait reposer cette étude sur quelques relations segmentaires fondamentales établies entre points d'une même droite, savoir:

$$AB + BA = 0, \qquad AB + BC = AC$$

et principalement[104]):

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

De ces relations segmentaires résulte tout d'abord que, aux 24 permutations que l'on peut former avec les quatre points A, B, C, D, correspondent seulement six valeurs distinctes du rapport anharmonique, chacune d'elles correspondant à quatre de ces permutations; des mêmes relations segmentaires, il résulte ensuite que ces six valeurs sont représentées par des nombres de la forme

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

où λ désigne l'une quelconque d'entre elles[105]).

On doit aussi à *A. F. Möbius* la relation suivante:

$$(ABDE)(ABEC)(ABCD) = 1$$

qui concerne les rapports anharmoniques formés avec cinq points d'une même droite; c'est lui également qui a établi que le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D peut s'exprimer, en fonction des rapports anharmoniques $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d$ que forme respectivement chacun

101) *Lignes du second ordre[13]), p. 9.*

102) *Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 12; (2e éd.) 1, p. 12.*

103) *Cf. *M. Chasles,* Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 34.*

104) Cette identité était déjà connue de *L. Euler*, Novi Comm. Acad. Petrop. 1 (1747/8), éd. 1750, p. 50 [1748] *et même plusieurs siècles avant lui du mathématicien arabe *El-Ṣābī* [10ième siècle; cf. *H. Suter*, Bibl. math. (3) 8 (1907/8), p. 24] (Note de *G. Eneström*).* **J. V. Poncelet* [J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 269] démontre aussi cette relation. Cf. *M. Chasles*, Aperçu hist.[1]), (2e éd.) p. 305; *W. F. Meyer*, Verhandl. des dritten intern. Math. Kongresses Heidelberg 1904, publ. par *A. Krazer*, Leipzig 1905, p. 322/46; *M. Stuyvaert,* L'enseignement math. 8 (1906), p. 282.*

105) Der baryc. Calcul[65]), p. 246/50; Werke 1, p. 222/4. Sur l'équation qui a pour racines ces six nombres et sur ses propriétés, voir *A. Cayley*, Messenger math. (2) 17 (1887/8), p. 95; Papers 12, Cambridge 1897, p. 578.

d'eux avec trois points fixes, par la formule[106]):

$$(ABCD) = \frac{(\lambda_a - \lambda_c)(\lambda_b - \lambda_d)}{(\lambda_b - \lambda_c)(\lambda_a - \lambda_d)}.$$

Cette proposition peut être considérée comme fondamentale dans la théorie des transformations homographiques [n° 8].

Lorsque quatre points sont tels que les six valeurs de leurs rapports anharmoniques sont égales deux à deux, l'une de ces valeurs est[107])

$$\lambda = -1;$$

on dit alors que ces points forment une *division harmonique*[108]); ils sont répartis en deux couples de points *conjugués* (zugeordnete Punkte) qui chevauchent l'un sur l'autre en se divisant harmoniquement, *et l'on dit que les deux points d'un couple sont *conjugués harmoniques* par rapport aux deux points de l'autre couple.*

On définit de même ce que l'on entend par faisceau harmonique de quatre droites concourantes ou de quatre plans passant par une même droite.

La proposition la plus importante de la géométrie projective sur les divisions et faisceaux harmoniques est la suivante: dans tout quadrilatère complet, deux sommets opposés forment un couple de points conjugués harmoniques par rapport à deux points diagonaux[109]).

106) Der baryc. Calcul[65]), p. 250; Werke 1, p. 225. Plus généralement, avec n droites quelconques d'un plan, il existe $2n-8$ rapports anharmoniques; avec n plans quelconques de l'espace, il en existe $3n-15$ en fonction desquels on peut exprimer rationnellement tous les autres rapports anharmoniques formés avec les divers éléments de la figure.

Consulter, au sujet des relations entre les rapports anharmoniques, *M. Chasles* [Géom. sup.[29]), (1^re^ éd.) p. 24; (2^e^ éd.) p. 22], *G. Battaglini* [Giorn. mat. (1) 1 (1863), p. 41, 97, 161], ainsi que les divers traités classiques.

107) Les autres rapports anharmoniques de ces quatre points sont alors $\lambda = 2$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

108) Au sujet de cette expression, *J. Steiner* [Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832, p. 19; Werke 1, Berlin 1881, p. 252] renvoie à *Ph. de la Hire* [Sectiones conicae[6]), Paris 1685] *et à *Ch. J. Brianchon* [Lignes du second ordre[13]), Paris 1817].*

109) C'est sur cette propriété que repose la construction, à l'aide de la règle seulement, du quatrième point d'une division harmonique donnée par trois de ses points. *J. Steiner* [Syst. Entw.[108]), p. 75; Werke 1, p. 290] l'attribue à *Ph. de la Hire* *[cf. *E. Lehmann*, De La Hire und seine „Sectiones conicae" 1, Leipzig 1888, p. 9].* *E. Busche* [Math. Ann. 41 (1893), p. 591] généralise cette construction en l'étendant au cas de $\lambda = -n$, n étant un nombre entier.

Des relations très nombreuses, toutes d'un caractère très élémentaire, concernent d'ailleurs les divisions et faisceaux harmoniques[110]).

Lorsque quatre points A, B, C, D sont tels que

$$(ABCD) = (ACDB) = (ADBC),$$

on dit qu'ils forment une division *équianharmonique*[111]); trois valeurs de λ sont alors égales à une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité négative, les trois autres à l'autre racine, de sorte que de pareils points ne sont jamais tous réels[112]).

La notion de rapport anharmonique a été étendue par *F. Folie*[113]) au cas général de $2n$ points $A, B, C, \ldots, K, L$ situés sur une même droite; *F. Folie* définit, comme rapport anharmonique général, l'expression:

$$AB \cdot CD \cdot \cdots \cdot KL : BC \cdot DE \cdot \cdots \cdot LA.$$

Au reste, ce rapport anharmonique général peut s'exprimer au moyen de rapports anharmoniques proprement dits[114]).

On peut d'autre part, en substituant aux segments ou aux angles plans des aires triangulaires ou des angles solides, étendre cette notion à des figures élémentaires de nature plus élevée. La possibilité de cette généralisation ayant été signalée pour la première fois par *J. V. Poncelet*[115]), *A. F. Möbius* en donna aussitôt un exemple en formant, avec six points ou davantage d'un même plan, des rapports d'aires triangulaires qui possèdent le caractère projectif[116]).

Cette étude devait être reprise de divers côtés. C'est d'abord *E. Heis*[117]) qui démontre que *le rapport de produits d'aires triangulaires

110) Cf. *M. Chasles*, Géom. sup.[29]), (1^re^ éd.) p. 38/55; (2^e^ éd.) p. 37/53; *G. Dostor*, Nouv. Ann. math. (1) 10 (1851), p. 73. Voir aussi les articles de Géométrie élémentaire de l'Encyclopédie.

111) Cette expression est due à *L. Cremona*, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Bologne 1862, p. 21.

112) *Pour l'interprétation géométrique des rapports anharmoniques imaginaires, cf. *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie[19]), publ. par *F. Lindemann*, (1^re^ éd.) 2[1], Leipzig 1891, p. 115; *G. Tarry*, Assoc. fr. avanc. sc. 16 (Toulouse) 1887[2], p. 168/88; *Cl. Servais*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 52 (1894/5), mém. n° 3, p. 6 (Note de *M. Stuyvaert*).*

113) Bull. Acad. Belgique (2) 44 (1877), p. 469; (2) 45 (1878), p. 88. Une extension du rapport anharmonique au cas de n points avait été déjà donnée par *O. Terquem*, Nouv. Ann. math. (1) 6 (1847), p. 68.

114) *Chr. Beyel* [Z. Math. Phys. 34 (1889), p. 375] donne également une autre généralisation, en composant un rapport anharmonique par voie d'addition avec plusieurs rapports simples. Il l'emploie pour engendrer une courbe de degré n ayant un point multiple d'ordre $n-1$

115) Propriétés projectives[15]), (1^re^ éd.) p. 23, (2^e^ éd.) 1, p. 23.

116) Der baryc. Calcul[65]), p. 306/10; Werke 1, p. 270/3.

117) Archiv Math. Phys. (1) 31 (1858), p. 37.

formées avec cinq points

$$(AEB \cdot DEC) : (AED \cdot BEC)$$

reste invariable* dans le cas particulier où on le projette par perspective. Puis *W. K. Clifford*[118]) donne, entre six points d'un même plan, la relation suivante:

$$ABC \cdot DEF - ABD \cdot EFC + ABE \cdot FCD - ABF \cdot CDE = 0,$$

laquelle est projective d'une part et, d'autre part, constitue l'extension de la relation qui, dans le cas de la droite, relie quatre points de cette droite et joue un rôle fondamental dans l'étude du rapport anharmonique. Partant de là, il généralise les relations projectives fondamentales, *et étend, en particulier, à deux systèmes de trois points A, B, C et A', B', C' la notion d'éléments conjugués harmoniques, qu'il définit par la condition

$$ABC \cdot A'B'C' + A'BC \cdot AB'C' + AB'C \cdot A'BC' + ABC' \cdot A'B'C = 0.$$

Il étend enfin toutes ces notions à la géométrie de l'espace en remplaçant des aires triangulaires par des volumes de tétraèdres.*

Ensuite, *G. Battaglini*[119]) établit un grand nombre de relations entre ces rapports d'aires triangulaires, et *C. W. Merrifield*[120]) s'attache, en particulier, au rapport suivant, formé avec cinq points seulement:

$$\mu = (ABC \cdot BCD \cdot CDE \cdot DEA \cdot EAB)$$
$$:(ACE \cdot BDA \cdot CEB \cdot DAC \cdot EBD)$$

en démontrant que, dans les 120 permutations que l'on peut former avec ces cinq points, ce rapport ne prend que 12 valeurs *deux à deux inverses l'une de l'autre.*

Plus récemment, *E. Busche*[121]) a étudié le rapport

$$(DBC \cdot AEF) : (ABC \cdot DEF)$$

formé avec six points, et démontré que, dans les 720 permutations effectuées sur ces six points, le rapport ne prend que 90 valeurs, *lesquelles s'expriment d'ailleurs rationnellement à l'aide de quatre seulement d'entre elles.*

118) Proc. London math. Soc. (1) 2 (1866/9), p. 3; Papers, Londres 1882, p. 110/4. *W. K. Clifford* donne également des relations analogues entre des grandeurs définies soit par trois droites d'un plan, soit par trois droites issues d'un même point, soit enfin par trois plans concourants. Dans ces deux derniers cas, ce sont les sinus des angles trièdres solides déterminés par ces droites ou plans qui interviennent.

119) Giorn. mat. (1) 3 (1865), p. 298.

120) Messenger math. (2) 5 (1876), p. 94.

121) J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 1.

J. Brill[122]) a étendu la proposition de *Pappus*, *en envisageant le rapport

$$(DFE \cdot DAC \cdot FCB \cdot EBA) : (ABC \cdot ADE \cdot BEF \cdot CFD)$$

et démontrant que, si l'on coupe six plans issus d'un même point par un septième plan quelconque, le rapport précédent formé avec les aires triangulaires découpées sur ce dernier plan par les premiers est indépendant de la position du septième plan.*

Enfin on trouvera, dans des recherches de *F. Folie* et *C. Le Paige*, une extension du rapport anharmonique à un système de six ou de neuf droites, issues d'un même point, avec une application à l'étude des surfaces du second ou du troisième ordre[123]).

8. Les figures fondamentales et leurs transformations homographiques. Après *J. V. Poncelet* à qui l'on doit les premiers principes de la géométrie projective, après *A. F. Möbius* à qui est due l'idée de la correspondance homographique, c'est à *J. Steiner*[124]) qu'il faut attribuer deux notions des plus fécondes, celle des *figures fondamentales* considérées comme éléments d'opérations nouvelles, puis celle des *méthodes projectives de génération* des figures, méthodes qui permettent de partir de figures fondamentales simples pour en déduire de nouvelles, et d'arriver ainsi progressivement à des figures de nature de plus en plus élevée, en n'employant d'autre procédé que celui qui consiste à déterminer les éléments communs à deux figures fondamentales ou à réunir deux éléments par une même figure fondamentale les comprenant tous deux.

*De son côté, *M. Chasles*[125]) a beaucoup contribué à répandre et

122) Quart. J. pure appl. math. 29 (1898), p. 286.

123) Bull. Acad. Belgique (2) 48 (1879), p. 41. Six points, convenablement choisis sur une quadrique, déterminent avec un autre point arbitraire de la même surface six rayons dont le rapport anharmonique est constant. Il en est de même avec certains groupes de neuf points d'une surface du troisième ordre. Les méthodes de génération de courbes et surfaces se trouvent ainsi généralisées.

124) Les recherches de *J. Steiner* constituent le sujet de son ouvrage: Syst. Entw.[108]); Werke 1, p. 229 et suiv. Dans un passage de cet ouvrage, *J. Steiner* [préface p. IX; Werke 1, p. 235] fait remonter à l'année 1828 l'origine de ses idées.

125) *Ainsi que nous l'avons déjà dit à propos de *A. F. Möbius*[85]), il semble que *M. Chasles* n'ait connu que de nom l'existence des travaux allemands antérieurs aux siens (il ne lisait pas l'allemand). Entraîné par ses grandes qualités d'exposition, il ne précise jamais dans ses traités si les résultats qu'il expose lui sont personnels, ou si c'est seulement la forme qu'il leur donne qui est nouvelle.*

à développer ces méthodes qu'il a principalement exposées dans deux ouvrages, le „Traité de géométrie supérieure“ et celui des „sections coniques“.*

Les figures fondamentales de *rang un* ou de *première espèce* (à une dimension) sont:

1°) la *forme rectiligne* ou *division ponctuelle*[126]), ou simplement *la ponctuelle*

$$u(A),$$

constituée par un ensemble de points A d'une droite u, appelée *base* ou *support*[127]) de la ponctuelle;

2°) le *faisceau de rayons*[128])

$$M(a),$$

constitué par un ensemble de droites a situées dans un même plan, le *plan* du faisceau, et passant par un même point M, le *sommet* ou *centre* du faisceau[129]);

3°) le *faisceau de plans*[130])

$$u(\alpha),$$

constitué par un ensemble de plans α passant par une même droite u, appelée *axe* du faisceau.

Les figures fondamentales de *rang deux* ou de *seconde espèce* (à deux dimensions) sont

1°) le *système plan*[131]), que l'on envisage simultanément comme formé soit par des points A, soit par des droites a d'un même plan ε,

2°) la *gerbe*[131a]), appelée aussi soit *gerbe de droites*[132])

$$S(a),$$

soit *gerbe de plans*[133])

$$S(\alpha),$$

126) *Punktreihe* en allemand, *row* (ou *range*) *of points* en anglais, *punteggiata* en italien.*

127) *Träger* en allemand, *base* en anglais, *sostegno* ou *sede* en italien.*

128) *Strahlenbüschel* en allemand, *flat pencil* en anglais, *fascio di raggi* en italien.*

129) *Mittelpunkt* en allemand, *centre* en anglais, *centro* en italien.*

130) *Ebenenbüschel* en allemand, *axial pencil* en anglais, *fascio di piani* en italien.*

131) *Punktfeld* ou *Strahlenfeld* en allemand, *field of points* ou *field of lines* en anglais, *piano punteggiato* ou *piano rigato* en italien.*

131a) On emploie aussi l'expression *étoile*. Parfois aussi on appelle *hyper-faisceaux* les systèmes plans de droites et les gerbes de droites.

132) *Strahlenbündel* en allemand, *pencil of lines* en anglais, *stella di raggi* en italien.*

133) *Ebenenbündel* en allemand, *pencil of planes* en anglais, *stella di piani* en italien.*

suivant qu'on la regarde comme formée de droites a ou de plans α issus d'un même point S.

Il n'existe enfin qu'une seule figure fondamentale de *rang trois* ou de *troisième espèce* (à trois dimensions) qui est le *système de l'espace* Σ, et que l'on peut regarder soit comme un *espace de points*

$$\Sigma(A),$$

constitué par des points de l'espace, soit comme un *espace de plans*

$$\Sigma(\alpha),$$

constitué par des plans de l'espace.

Toutes ces figures fondamentales se correspondent deux à deux par voie dualistique, savoir la ponctuelle et le faisceau de plans, le système plan de points et la gerbe de plans, le système plan de droites et la gerbe de droites, l'espace de points et l'espace de plans, le faisceau de rayons étant à lui-même son dualistique[134]). De là résulte que toute correspondance homographique entre deux formes fondamentales, tout procédé de génération de figure peut se transformer par dualité; de là enfin l'origine d'un principe de transformation des plus féconds dans la théorie des courbes et des surfaces[135]).

On étudiera plus loin [n° **13**] les involutions considérées comme figures fondamentales.

Les formes fondamentales étant ainsi classées et définies, on étudie ensuite leurs propriétés capitales et principalement les opérations géométriques simples que l'on peut effectuer sur ces formes. La première de ces propriétés concerne ce qu'on appelle les *formes en perspective*.

On dit qu'une *ponctuelle* $u(A)$ et un *faisceau de rayons* $M(a)$ sont en *perspective* lorsque la ponctuelle est la section du faisceau par une transversale rectiligne, c'est-à-dire lorsque chaque rayon a du faisceau correspond à son point d'intersection A avec la base u de la division[136]).

On dit de même que deux *ponctuelles* $u(A)$ et $u'(A')$ sont en perspective lorsqu'elles sont les sections d'un même faisceau de rayons par leurs droites de base u et u', c'est-à-dire lorsque chaque point A de la première correspond au point A' de la seconde situé sur le

134) Dans la géométrie du plan, ce sont la ponctuelle et le faisceau de rayons qui se correspondent par dualité, et de même dans la géométrie de la gerbe, ce sont le faisceau de rayons et le faisceau de plans.

135) Dans ce qui suit, lorsque nous rencontrerons deux propositions se transformant l'une dans l'autre par dualité, nous n'énoncerons le plus souvent qu'une seule d'entre elles.

136) On dit aussi que le faisceau est la *projection* de la ponctuelle.

même rayon du faisceau, de sorte que, en particulier, au point d'intersection des deux bases u et u' se trouvent confondus deux points homologues.

De même encore, on dit qu'une *gerbe* S et un *système plan* ε sont en *perspective* lorsque chaque rayon a de la gerbe S correspond à son point d'intersection A avec le plan ε, et chaque plan β de la gerbe à sa droite d'intersection b avec le plan. Enfin, on définit de la même manière la perspective entre deux systèmes plans α, α' ou entre deux gerbes S et S'.

Cette notion de perspective entre deux formes fondamentales conduit immédiatement à l'idée plus générale de correspondance *projective* ou *homographique*. Celle-ci peut être présentée sous des formes diverses.

Et d'abord, ainsi que l'a fait *J. Steiner*[137]) lorsqu'il a présenté pour la première fois la correspondance projective entre deux divisions ponctuelles ou deux faisceaux de rayons, on dit que deux figures fondamentales sont en correspondance *projective* ou *homographique*, ou simplement qu'elles sont *projectives* ou *homographiques*, lorsque, ces deux figures étant d'abord en perspective, on déplace l'une d'elles d'une manière quelconque en la considérant comme une figure de grandeur invariable, la correspondance entre éléments homologues subsistant.

Mais si l'on regarde la disposition relative dans l'espace de deux figures fondamentales comme invariable, c'est par d'autres procédés qu'il faut définir la correspondance homographique. Dans le cas de deux figures de rang un on peut y arriver de trois manières différentes.

Première manière. Une première définition, obtenue par une interprétation immédiate du cas de deux figures qu'un déplacement peut amener à être en perspective, se trouve déjà dans *J. Steiner*; elle repose sur la proposition de *Pappus* concernant le caractère projectif du rapport anharmonique, et dit que deux figures de rang un, ponctuelles, faisceaux de rayons, ou faisceaux de plans, sont rapportées projectivement ou encore sont en correspondance homographique, lorsque leurs éléments se correspondent d'une manière biuniforme de telle façon que les rapports anharmoniques d'éléments homologues soient toujours égaux[138]).

La *proposition fondamentale* de cette théorie, conséquence immédiate de la définition, est que *la correspondance homographique est complètement déterminée par trois couples d'éléments homologues*[139]). Cette définition conduit à d'autres conséquences: l'une est que la correspondance homographique est continue; une autre est que, dans deux divisions ponctuelles homographiques, les abscisses de deux points homologues sont liées par une *relation bilinéaire.* C'est cette relation bilinéaire qui donne une base analytique à l'étude de la correspondance homographique[140]).

C'est ainsi que, dans une première méthode, *M. Chasles*[141]) s'est servi, pour définir cette correspondance, de relations segmentaires qui sont équivalentes à la relation bilinéaire. Plus tard, élevant son point de vue, il a posé en postulat que toute correspondance biuniforme et non transcendante est homographique[142]). Lorsqu'on opère dans le domaine complexe, ce postulat peut être rigoureusement démontré, mais il n'en est plus de même lorsqu'on se limite au domaine réel; énoncé sous cette même forme générale, le postulat n'est plus alors légitime, ainsi que l'a montré *C. F. Geiser* sur un exemple[143]).

C'est qu'en effet, si deux variables sont liées par une relation algébrique, ce que *M. Chasles* suppose implicitement par hypothèse, cette relation peut n'avoir qu'une seule racine réelle pour chaque valeur réelle attribuée à l'une des variables[144]). Néanmoins le principe de Chasles, ainsi que son principe général de correspondance, ont conduit à une foule de résultats de valeur. Cela tient sans doute à ce

137) Syst. Entw.[108]), p. 10; Werke 1, p. 246. C'est *M. Chasles* qui a employé l'expression *homographie*, s'appliquant à la correspondance de ce nom entre deux figures fondamentales quelconques, tandis que *J. V. Poncelet* avait déjà parlé d'*homologie*, à propos de figures en perspective.

138) Cf. *A. F. Möbius*, Der baryc. Calcul[65]), p. 317; Werke 1, p. 279.

139) Sur cette question et sur les suivantes, cf. III 1, n[os] **27**, **28**.

140) C'est *A. Cayley* [Philos. Trans. London 149 (1859), p. 61; Papers 2, Cambridge 1889, p. 566] qui, le premier, a reconnu que le rapport anharmonique est un invariant de la transformation bilinéaire.

141) Aperçu hist.[1]), (2[e] éd.) p. 302. Voir aussi Géom. sup.[29]), (1[re] éd.) p. 81; (2[e] éd.) p. 77.

142) C. R. Acad. sc. Paris 41 (1855), p. 1097. Dans cet article, *M. Chasles* a énoncé un autre principe analogue au précédent; d'après ce second principe, lorsqu'il existe une correspondance biuniforme entre les points d'une ponctuelle et les couples de points d'une autre ponctuelle, ces couples de points sont en involution et correspondent anharmoniquement aux points de la première ponctuelle.

143) Ann. mat. pura appl. (2) 4 (1870/1), p. 25. Dans cet ordre d'idées, cette proposition que deux tangentes fixes d'une ellipse sont coupées par une tangente mobile suivant deux ponctuelles homographiques, devrait en effet s'étendre à toute courbe ayant la forme d'une ovale convexe.

144) C'est également cette hypothèse que fait implicitement *W. Fiedler* [Z. Math. Phys. 6 (1861), p. 1] lorsque, dans un essai de démonstration du principe de Chasles, il admet immédiatement que la correspondance algébrique biuniforme s'exprime par une relation bilinéaire. Voir aussi, *P. H. Schoute*, Diss. Leyde 1870.

que l'on n'en fait généralement application que lorsqu'on connaît réellement le nombre total des modes possibles de correspondance, aussi bien les modes réels que les modes imaginaires et que, par le fait, on opère implicitement dans le domaine complexe [cf. III 4].

Seconde manière. En second lieu, si l'on veut donner à la géométrie projective une base indépendante de la métrique euclidienne et de l'axiome de congruence [145]), il ne faut faire intervenir ni le rapport anharmonique, ni la notion de mouvement, à laquelle *J. Steiner* avait recours dans son point de vue primitif. Une première définition, satisfaisant à ces conditions, a été donnée par *K. G. Chr. von Staudt.* Nous y reviendrons plus loin avec plus de détails [n° **17**]. Signalons seulement qu'elle repose sur une définition, indépendante de toute idée métrique, d'une division harmonique, et qu'elle considère une correspondance homographique, entre deux divisions ponctuelles par exemple, comme une correspondance dans laquelle, chaque point de l'une étant d'abord l'homologue d'un point et d'un seul de l'autre, chaque division harmonique de l'une a pour homologue une autre division harmonique.

Troisième manière. On doit enfin à *L. Cremona* [146]) une autre définition remplissant également les conditions énoncées, et d'après laquelle deux figures, ponctuelles ou faisceaux de rayons, sont dites en correspondance homographique lorsqu'elles sont les deux termes extrêmes d'une suite finie dans laquelle deux figures consécutives sont en perspective [147]). Cette définition peut s'étendre au plan et à l'espace. Elle pose alors un problème important, celui de chercher, étant données deux figures en correspondance homographique, combien on peut prendre au minimé de figures intermédiaires [148]).

145) Pour entrer dans une discussion complète des diverses méthodes, il est indispensable de recourir à des considérations sur la géométrie non-euclidienne [cf. III 1].

146) Elementi di geometria proiettiva, Turin 1873; trad. *E. Dewulf,* Eléments de géométrie projective, Paris 1875, p. 27. Cf. *J. Thomae* [Ebene geometrische Gebilde vom Standpunkt der Geometrie der Lage betrachtet, Halle 1873, p. 16] et *F. Aschieri* [Memorie Ist. Bologna (4) 1 (1880), p. 145].

147) On trouve déjà dans *K. G. Chr. von Staudt* [Geom. der Lage, Nuremberg 1847, p. 55] l'idée d'établir la correspondance projective à l'aide d'une succession de perspectives.

148) Dans le cas des systèmes plans, il suffit, d'après *V. von Dantscher* [Ber. Naturw.-mediz. Ver. Innsbruck 18 (1888/9), p. 86/96] de trois perspectives. *Cf. *Cl. Servais,* Le mat. pure appl. 1 (1901), p. 254/63; Acad. Belgique, classe sc. Mém. in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 8.*

Dans le cas de la transformation homographique d'un espace ayant un nombre quelconque de dimensions, *F. Aschieri* [Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 18 (1885), p. 989] a montré qu'il suffisait d'une succession de perspectives en nombre limité. Puis *C. Segre* [Jahrb. Fortschr. Math. 17 (1885), éd. 1888, p. 613], analysant ce travail, a ajouté cette remarque que le nombre minimum de ces perspectives est $n-m$, si n est le nombre de dimensions de l'espace transformé, m celui de la multiplicité des éléments doubles de la transformation.

Considérons maintenant les figures de rang supérieur. La correspondance homographique, que nous avons envisagée plus haut, entre deux plans ε et ε', est identique à la *collinéation* que nous avons déjà rencontrée dans les travaux de *A. F. Möbius* [n° **6**]. On peut donc la définir comme une correspondance entre deux plans qui relie chaque point de l'un à un point de l'autre, chaque droite de l'un à une droite de l'autre, de telle façon que deux éléments incidents correspondent à deux éléments incidents, c'est-à-dire que si le point A est sur la droite d, son homologue A' est également sur la droite d' homologue de d. La proposition fondamentale de la théorie consiste en ce que la collinéation est complètement définie par quatre couples de points ou de droites homologues placés dans une disposition générale [149]). Elle est une conséquence immédiate de la proposition fondamentale, signalée plus haut, et relative aux figures de première espèce. Mais si, avec *A. F. Möbius,* on ne considère pas comme établie au préalable la théorie des figures homographiques de première espèce, la démonstration de cette proposition, qui repose sur la construction par réseaux due à *A. F. Möbius,* doit en outre invoquer un axiome de continuité [voir n° **17**].

Une collinéation peut être définie par d'autres conditions; en particulier, on peut se donner un point P dans l'un des deux plans et une droite p' dans l'autre plan, l'homologue de P étant assujetti à se trouver sur la droite p'; d'après *H. Schröter* [150]), on peut substituer, à un couple de deux points homologues A, A', un système de deux points P, Q du premier plan associés, comme il vient d'être dit, à deux droites p', q' du second; et la collinéation est déterminée d'une manière unique par huit points du plan ε, associés à huit droites du plan ε'.

Dans une collinéation, deux ponctuelles homologues, ou deux faisceaux de rayons homologues, sont en correspondance homographique.

C'est à *F. Seydewitz* [151]) que l'on doit le premier exemple d'une correspondance homographique entre deux plans réalisée par une construction graphique: il l'obtient en plaçant dans le premier plan ε

149) Il s'agit de points tels que trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés, et de droites telles que trois quelconques d'entre elles ne sont jamais concourantes.

150) J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 215.

151) Archiv Math. Phys. (1) 7 (1846), p. 113; (1) 8 (1846), p. 1.

deux faisceaux de rayons $P(a)$ et $Q(b)$, dans le second plan ε' deux autres faisceaux $P'(a')$ et $Q'(b')$ et en reliant respectivement les deux faisceaux du second plan aux deux faisceaux du premier par des correspondances homographiques telles que la droite PQ qui joint les sommets des deux faisceaux du plan ε soit, dans chacune de ces deux correspondances, l'homologue de la droite $P'Q'$ qui joint les sommets des deux faisceaux du plan ε'.

La correspondance projective, ou collinéaire, ou homographique, entre deux espaces Σ et Σ', se définit de la même façon par une correspondance biuniforme entre leurs éléments dans laquelle des éléments incidents correspondent à des éléments incidents. La collinéation est complètement définie par cinq couples de points homologues placés dans une disposition générale[152]), et cette proposition est une conséquence immédiate des propositions fondamentales analogues qui concernent les figures de rang un ou deux; mais, si l'on veut une démonstration directe, indépendante de ces propositions, il est toujours nécessaire, en utilisant la construction par réseaux de *A. F. Möbius*, de recourir à l'axiome de continuité.

Dans la correspondance homographique entre deux espaces, deux figures fondamentales homologues, de rang un ou deux, sont elles-mêmes en correspondance homographique.

Signalons enfin que, dans cette correspondance, deux figures homologues sont toujours disposées soit dans le même sens, soit en sens contraire[153]).

On emploie souvent la notation[154])

$$ABC\ldots MN\ldots \;\overline{\wedge}\; A'B'C'\ldots M'N'\ldots$$

pour indiquer que $ABC\ldots MN\ldots$ sont homologues de $A'B'C'\ldots M'N'\ldots$ dans deux figures homographiques de rang un, deux ou trois.

Un progrès capital, dans la théorie des correspondances homographiques, a été réalisé lorsque *K. G. Chr. von Staudt* introduisit l'idée

152) *N. G. Poudra* [Nouv. Ann. math. (1) 19 (1860), p. 108] a donné une construction de deux points homologues dans le cas où l'on connaît déjà cinq couples de points homologues.

153) Cf. *G. Hauck*, Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 381; *C. Rodenberg*, id. 30 (1885), p. 112. La différence entre deux espaces disposés en sens contraire est la même que celle qui existe entre la main droite et la main gauche. Dans le cas de deux espaces placés en perspective, *K. G. Chr. von Staudt* [Geometrie der Lage, Nuremberg 1847, p. 71] en avait déjà dit quelques mots.

154) Cette notation est également employée pour désigner les éléments homologues de deux plans, ou de deux gerbes, ou de deux espaces, en correspondance homographique.

de *jet* (*Wurf*), expression par laquelle il désigne un système de quatre points A, B, C, D placés en ligne droite et pris dans un ordre déterminé. Le but de *K. G. Chr. von Staudt*, but qu'il a d'ailleurs atteint, était d'affranchir la notion de rapport anharmonique de tout caractère métrique. Or l'étude des correspondances homographiques montre que, deux *jets* quelconques étant donnés, il est en général impossible de trouver une correspondance homographique dans laquelle ces jets soient formés de points homologues; lorsque ceci est possible, on dit que les deux jets sont égaux. Ainsi une notion purement géométrique se substitue à l'idée de rapport anharmonique. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point aux n^os^ **17** et **21**.

G. Kohn a donné, pour le plan et l'espace, une extension formelle de cette notion[155]); cette extension repose sur la considération suivante. Si l'on définit la transformation homographique d'un plan ε en un autre plan ε' en se donnant quatre points A, B, C, D dans le premier et les quatre points homologues A', B', C', D' dans le second, un cinquième point E du plan ε détermine, avec les quatre premiers A, B, C, D, une conique c, et sur cette conique, les cinq points forment entre eux plusieurs jets distincts[156]). De même, dans le plan ε', les cinq points A', B', C', D', E' déterminent, d'une part, une conique c' qui est la transformée homographique de c, et, d'autre part, plusieurs jets qui sont respectivement égaux aux précédents. On conçoit ainsi que l'ensemble des cinq points A, B, C, D, E forme un *jet ponctuel* qui reste invariant dans toute transformation homographique [cf. n° **11**]. En désignant respectivement par A_1, B_1, C_1 les points d'intersection de la droite DE avec BC, CA, AB, on peut aussi représenter ce jet par $(A_1B_1C_1DE)$.

Cette définition peut être étendue à l'espace; la transformation homographique d'un espace Σ en un autre Σ' est alors définie par cinq points A, B, C, D, E du premier et les points homologues A', B', C', D', E' du second; les cinq points A, B, C, D, E et un sixième point quelconque F définissent une cubique gauche qui est l'homo-

155) Math. Ann. 46 (1895), p. 285. La notion s'étend à un espace à n dimensions en intervenir pour cet espace une certaine courbe d'ordre n, appelée courbe normale de cet espace. *Cf. *G. Kohn* [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), p. 450/4; Math. Ann. 46 (1895), p. 285/309; Sitzgsb. Akad. Wien 104 II^a^ (1895), p. 1167/70]; *Chr. Beyel*, Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 59/60; *F. London*, Archiv Math. Phys. (3) 7 (1904), p. 200/25.*

156) *A. F. Möbius* [J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 124, Werke 1, Leipzig 1885, p. 474] et *F. Seydewitz* [Archiv Math. Phys. (1) 8 (1846), p. 1] avaient déjà montré que la transformation homographique du plan peut être définie à l'aide de deux coniques en correspondance projective.

logue de la cubique définie par les six points homologues A', B', C', D', E', F'', et, sur ces deux cubiques, les jets formés avec des points homologues sont encore égaux; on a ainsi, dans l'espace, un *jet* formé par six points.

En même temps que les transformations homographiques, il y a lieu d'étudier les transformations dites *réciproques,* ou *corrélatives,* des figures de rang deux ou trois.

On dit que deux plans ε et ε' sont *réciproques* l'un de l'autre, ou encore, avec *M. Chasles,* qu'ils se correspondent par voie de *corrélation,* lorsque chaque point A ou A' de l'un correspond à une droite a' ou a de l'autre, deux éléments incidents A, b correspondant en outre à deux éléments incidents a', B'. On définit de la même manière la corrélation entre deux gerbes S et S' par une correspondance entre les droites de l'une et les plans de l'autre.

Enfin, la corrélation entre deux espaces Σ et Σ' fait correspondre respectivement les points, droites et plans de l'un aux plans, droites et points de l'autre, avec la condition que les points A de l'un de ces espaces, de Σ par exemple, situés dans un même plan α de cet espace, correspondent, dans l'autre espace Σ', aux plans α' passant par le point A' homologue de α, et que, par suite, les points A appartenant à une même droite d de l'espace Σ correspondent aux plans α' passant par la droite d' homologue de d.

Une correspondance projective, de même qu'une correspondance réciproque, entre deux espaces Σ et Σ' peut être définie en rapportant projectivement les systèmes réglés d'une quadrique de Σ aux systèmes réglés d'une quadrique de Σ'.

A. F. Möbius a déduit la correspondance réciproque entre deux plans de la correspondance homographique[157]); *et nous avons déjà dit que, inversement, *M. Chasles* avait déduit la seconde de la première[158]) [n° 6]*; mais c'est principalement à *F. Seydewitz* que l'on doit la première étude approfondie de ce procédé de transformation[159]).

Les propositions qui concernent des figures homographiques peuvent se transformer, par dualité, en propositions sur des figures corrélatives: en particulier, la correspondance réciproque entre deux plans ou deux gerbes est complètement déterminée par quatre couples d'éléments homologues, et celle entre deux espaces par cinq couples. Rappelons que l'existence des figures réciproques constitue une démonstration

157) Der baryc. Calcul[65]), p. 440; Werke 1, p. 376.

158) Aperçu hist.[1]), (2° éd.) p. 695.

159) Archiv Math. Phys. (1) 8 (1846), p. 1.

directe, pour le plan comme pour l'espace, du principe général de dualité[160]).

On dit que deux points A et B', situés respectivement dans deux plans corrélatifs ε et ε', sont *conjugués,* ainsi que leurs droites homologues a' et b, lorsque le premier point A se trouve sur la droite b homologue du second, hypothèse d'où résulte que le second point B' est aussi sur la droite a' homologue de A. Cette définition s'étend aussi à l'espace. On dit encore que deux points conjugués forment un *système nul* parce que la forme ternaire bilinéaire qui représente analytiquement la corrélation s'annule pour un système de deux éléments conjugués. D'après une proposition de *H. Schröter*[161]), on peut, dans la détermination d'une corrélation, remplacer un couple d'éléments homologues A, a' (ou A, α') par deux systèmes de points conjugués. Au reste la théorie des systèmes nuls est essentiellement une théorie analytique[162]); rappelons seulement ici cette proposition, énoncée pour la première fois par *A. Clebsch*[163]), que cinq systèmes nuls en déterminent toujours un sixième, indépendant linéairement des premiers.

9. Propriétés métriques de la correspondance homographique. Lorsque deux ponctuelles ou deux faisceaux de rayons sont en correspondance homographique, il existe, entre leurs éléments homologues, des relations métriques très nombreuses, toutes conséquences de l'égalité des rapports anharmoniques[164]). Nous ne citerons que celles qui ont une importance capitale.

Dans deux ponctuelles homographiques, de bases d et d', le point à l'infini Q_∞ de la base d correspond, sur d', à un point Q' qui, en général, est à distance finie, et de même, le point à l'infini R'_∞ de la base d' correspond, sur d, à un point à distance finie R. Ces

160) Voir n° **17**, au sujet des hypothèses sur lesquelles repose cette démonstration.

161) J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 215. L'étude des constructions à effectuer, lorsque la transformation est ainsi définie, a été faite principalement par *F. London,* Math. Ann. 38 (1891), p. 334.

162) Voir principalement *J. Rosanes*, J. reine angew. Math. 88 (1880), p. 241/73; 90 (1881), p. 303/21.

163) Math. Ann. 6 (1873), p. 205. Un exemple de six systèmes nuls ainsi définis est donné par les points d'intersection d'un plan avec les couples de droites d'un *double-sixain* (doppelsechs) d'une surface du troisième ordre; cf. *R. Sturm,* Math. Ann. 22 (1883), p. 574.

164) Voir, principalement, *M. Chasles,* Géom. sup.[29]), (1re éd.) p. 81; (2e éd.) p. 77; puis, *A. Jacobi,* J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 40; *E. Heis,* Archiv Math. Phys. (1) 31 (1858), p. 37; *G. Battaglini,* Giorn. mat. (1) 1 (1863), p. 1, 41, 97, 161; *G. Veronese,* Giorn. mat. (1) 17 (1879), p. 181.

deux points, R et Q', sont appelés *points de fuite* ou *points-limites*; le produit

$$RA \cdot Q'A'$$

garde une valeur constante, quels que soient les deux points homologues A, A', et cette valeur constante est appelée *puissance* de la correspondance homographique. Aux points de fuite on associe deux couples de points homologues G, G' et H, H', appelés *points de puissance*, lesquels satisfont aux relations

$$RG = Q'G' = HR = H'Q'.$$

Enfin, il existe dans la correspondance deux systèmes de segments homologues égaux: à chaque couple de points homologues A, A', on peut en effet toujours associer deux autres couples C, C' et D, D' tels que l'on ait

$$AC = A'C' \quad \text{et} \quad DA = D'A'.$$

De la même façon, lorsque deux faisceaux de rayons, de sommets M, M', sont homographiques, il existe toujours, dans chacun d'eux, deux rayons rectangulaires ayant pour homologues, dans l'autre faisceau, deux autres rayons rectangulaires. Si s, t sont ces rayons dans le faisceau M, si s', t' sont ceux du faisceau M', et si a, a' sont deux rayons homologues quelconques, le produit

$$\operatorname{tg}(s, a) \cdot \operatorname{tg}(t', a')$$

est constant, et sa valeur est appelée *puissance* de la correspondance homographique. A ces rayons on associe deux autres couples de rayons homologues g, g' et h, h' appelés *rayons de puissance*, lesquels satisfont aux relations

$$(s, g) = (t', g') = (h, s) = (h', t').$$

Enfin, il existe encore, dans la correspondance, deux systèmes d'angles homologues égaux, dont les angles droits (s, t) et (s', t') ne sont qu'un cas particulier: à chaque couple de rayons homologues a, a' correspondent toujours deux autres couples c, c' et d, d' tels que l'on ait

$$(a, c) = (a', c') \quad \text{et} \quad (d, a) = (d', a').$$

Passons à deux plans ε, ε' en correspondance homographique. Dans ces plans, la droite de l'infini de chacun d'eux, q_∞ ou r'_∞, correspond, en général, à une droite à distance finie, q' ou r, appelée *ligne de fuite* ou *droite-limite*. *F. Seydewitz*[165]) a montré qu'il existe dans chaque plan deux faisceaux de rayons respectivement congrus (superposables) à leurs faisceaux homologues, les sommets de ces deux faisceaux F et F_1 dans ε, F' et F_1' dans ε', étant symétriques par rapport à la ligne de fuite, r ou q', de ce plan. De même, il existe dans chaque plan deux ponctuelles respectivement congrues (égales) à leurs ponctuelles homologues, les bases de ces deux ponctuelles étant parallèles à la ligne de fuite du plan et $_*$symétriques par rapport à cette ligne*. Il en résulte que l'on peut toujours disposer deux plans en correspondance homographique de manière qu'ils soient en perspective[166]).

H. J. S. Smith[167]) a établi en outre que le faisceau de cercles ayant pour points limites F et F_1 a pour homologue un autre faisceau de cercles dont F' et F_1' sont les points limites[168]), et aussi que toute conique de foyers F et F_1 a pour homologue une autre conique de foyers F' et F_1'. L'existence de ces deux faisceaux homologues de coniques homofocales domine toute l'étude des relations métriques entre les deux plans ε et ε'[169]).

Considérons maintenant deux gerbes, de sommets M et M', en correspondance homographique. D'abord chacune d'elles comprend toujours un système de trois rayons, deux à deux rectangulaires et toujours réels, ayant pour homologues trois autres rayons deux à deux rectangulaires. Puis, dans chaque gerbe, il existe, d'une part, deux faisceaux de plans respectivement congrus à leurs faisceaux homologues et, d'autre part, deux faisceaux de rayons respectivement congrus à leurs faisceaux homologues; les axes des premiers sont respectivement perpendiculaires aux plans des seconds; les deux axes des premiers, ainsi que les deux plans des seconds, sont symétriques par rapport aux arêtes du trièdre trirectangle signalé plus haut[170]).

165) Voir Archiv Math. Phys. (1) 8 (1846), p. 10; cf. *G. Battaglini,* Giorn. mat. (1) 4 (1866), p. 97, 174; *A. Transon,* Nouv. Ann. math. (2) 8 (1869), p. 228; *E. Isé,* Atti Accad. Pontaniana [Naples] (1) 24 (1894), mém. n° 3.

166) *G. Kilbinger* [Z. Math. Phys. 42 (1897), p. 104] en a donné une démonstration qui fait intervenir, dans les deux plans, les faisceaux de rayons égaux à leurs homologues.

167) Proc. London math. Soc. (1) 2 (1866/9), p. 196. $_*$Les points principaux de ce travail sont reproduits Nouv. Ann. math. (2) 10 (1871), p. 66.*

168) Ces points limites sont aussi bien les centres des cercles de rayon nul qui appartiennent au faisceau que les deux points communs à tous les cercles du faisceau orthogonal au premier.

169) *A. Cayley* [Quart. J. pure appl. math. 3 (1860), p. 177; Papers 4, Cambridge 1891, p. 442] signale également quelques propriétés métriques particulières.

170) Voir *F. Seydewitz* [Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 166] qui signale en outre plusieurs autres relations; et *H. Faure,* Nouv. Ann. math. (1) 17 (1858), p. 276; (1) 18 (1859), p. 381; (1) 19 (1860), p. 189. *H. J. S. Smith*[167]) a déduit ces relations de la considération des cônes isotropes homologues (Nullkugeln). Enfin, *H. Schröter* [Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde, Leipzig 1880, p. 377, 384] en donne une démonstration géométrique simple

Les relations métriques entre deux espaces Σ et Σ' en correspondance homographique ont été maintes fois étudiées[171]. D'abord, dans ces espaces, le plan de l'infini de chacun d'eux, ε_∞ ou η'_∞, correspond, en général, à un plan à distance finie, ε' ou η, appelé *plan de fuite* ou *plan-limite*. Puis, dans chaque espace, il existe une infinité de ponctuelles congrues à leurs ponctuelles homologues, leurs bases étant parallèles au plan de fuite et formant, dans chaque plan parallèle au plan de fuite, deux faisceaux de rayons parallèles[172].

A deux plans homologues quelconques α, α' correspondent toujours deux droites homologues b, b' qui leur sont respectivement perpendiculaires; l'ensemble de ces droites b ou b' forme, dans chaque espace, un complexe du second ordre Γ identique au complexe des axes des sections planes d'un système de quadriques homofocales, le tétraèdre fondamental de ce complexe étant constitué, dans l'espace Σ, par le plan de l'infini ε_∞, „le plan de fuite η", et deux autres plans formant avec η un trièdre trirectangle. Ce système de quadriques homofocales F est, de plus, l'homologue du système de quadriques homofocales F', qui se présente de la même manière dans l'espace Σ'; ces deux faisceaux de quadriques jouent d'ailleurs un rôle caractéristique dans la discussion des relations entre les deux espaces. En particulier, l'ensemble des axes des faisceaux de plans congrus à leurs faisceaux homologues forme une congruence qui est identique à celle des génératrices rectilignes de ces quadriques homofocales F[173]: cette congruence, d'ordre six et de classe deux, a été étudiée en premier lieu par *R. Sturm*[174]. Une étude approfondie a également été faite des faisceaux de rayons congrus à leurs homologues[175] et des cercles qui ont pour homologues d'autres cercles[176].

171) Voir *E. Maegis*, Diss. Königsberg 1868; *F. J. Richelot*, J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 137; *G. Wenzel*, Diss. Breslau 1870; et, principalement, *H. J. S. Smith*[167], puis *Th. Reye* [Math. Ann. 46 (1895), p. 423] qui reprend et étend les travaux du précédent.

172) Ces bases forment dans chaque espace une congruence (2, 2); elles sont réelles entre deux plans parallèles au plan de fuite et symétriques par rapport à ce plan [cf. *R. Sturm*, Math. Ann. 28 (1887), p. 261].

173) *F. J. Richelot* [J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 137/55] avait déjà constaté que, parmi ces droites, se trouvent les tangentes aux coniques focales.

174) Math. Ann. 28 (1887), p. 261.

175) L'étude de ces faisceaux de rayons comporte, en particulier, l'étude de l'ensemble de leurs plans et de leurs foyers (*Nullsystem*); à cet ensemble se rattachent trois nombres caractéristiques: le premier est le nombre de ces faisceaux ayant un point donné pour sommet ($\alpha = 6$); le second est le nombre des faisceaux situés dans un plan donné ($\beta = 2$); le troisième est le nombre des faisceaux qui comprennent une droite donnée ($\gamma = 4$).

Les formules concernant la courbure et la torsion, en des points homologues, de deux courbes homographiques ont été établies à maintes reprises; il en est de même pour le problème analogue concernant les surfaces[177]. On peut, dans cette étude, faire intervenir systématiquement les deux faisceaux homologues de coniques ou de quadriques homofocales que nous avons signalés plus haut et considérer les deux figures comme étant partagées par ces deux faisceaux en régions homologues. Ce procédé a été principalement employé par *H. J. S. Smith*, puis, à son exemple, par *Th. Reye*[171]; tous deux ont établi les formules dont nous parlons.

On peut étudier la courbure des coniques et des quadriques en remarquant que toute conique peut être considérée comme la figure homographique d'un cercle et en particulier, de son cercle de courbure: c'est ainsi que *C. Cranz*[178] a fait une étude approfondie de la question. On peut aussi, dans cet ordre d'idées, établir les formules d'Euler et de Meusnier[179].

Les formules relatives à la courbure de deux courbes ou surfaces homologues, dans deux figures corrélatives, ont été établies par divers auteurs[180].

Toutes ces propriétés métriques de deux figures homographiques

Voir *R. Sturm*, Math. Ann. 28 (1887), p. 267. Le nombre $\alpha = 6$ a été incidemment déterminé, à propos de l'étude de deux gerbes en correspondance homographique, par *H. Schröter* [Oberflächen zweiter Ordnung[170], p. 392] qui montre en outre que, sur les six plans de ces faisceaux, il n'y en a que deux réels.

176) *G. Kilbinger*, Diss. Strasbourg 1880. Ces cercles forment, dans chaque plan, un faisceau dont l'axe radical coïncide avec la ligne de fuite du plan.

177) *L. Geisenheimer*, Z. Math. Phys. 25 (1880), p. 214; *R. Mehmke*, „Teorems nulik dö kolienat, article original écrit en volapük dans une revue rédigée en cette langue et publiée à Londres en 1888"; un compte-rendu se trouve Jahrb. Fortschr. Math. 20 (1888), éd. Berlin 1891, p. 861/2; *F. Machovec*, Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1888, p. 169; *Cl. Servais*, Mémoires couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 58 (1898/9), mém. n° 2, p. 3; *A. Demoulin*, C. R. Acad. sc. Paris 126 (1898), p. 390.

178) Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen zweiter Ordnung, Stuttgard 1886. La courbure des coniques avait été déjà étudiée, à ce point de vue, par *J. Steiner* [Vorlesungen über synthetische Geometrie 2, Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften, réd. par *H. Schröter*, (1re éd.) Leipzig 1867, p. 214; (3e éd.) Leipzig 1898, p. 203; *C. Pelz*, Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1879, p. 205. Cf. III 17, 56 note 477.

179) *W. Marx*, Math. Ann. 17 (1880), p. 110; *C. Cranz*, Z. Math. Phys. 31 (1886), p. 56; *A. Mannheim*, Propriétés métriques[72].

180) *L. Geisenheimer*, Z. Math. Phys. 30 (1885), p. 129; „*A. Demoulin*[177]; C. R. Acad. sc. Paris 114 (1892), p. 1102/4; Bull. Soc. math. France 21 (1893), p. 83/4; 28 (1900), p. 180/3; Mathesis (3) 2 (1902), p. 132; *Cl. Servais*[177]."

se simplifient dans le cas où les éléments à l'infini se correspondent entre eux. Deux ponctuelles homographiques dont les points à l'infini se correspondent sont dites *semblables*: dans ces divisions, deux segments homologues sont dans un rapport constant, et lorsque ce rapport est égal à l'unité, les ponctuelles sont dites *congruentes* ou *égales*.

Deux plans ou deux espaces en correspondance homographique, dont les éléments à l'infini (droites de l'infini ou plans de l'infini) se correspondent, constituent ce que l'on appelle deux figures *affines*. Dans une correspondance de ce genre, le milieu d'un segment quelconque correspond toujours au point milieu du segment homologue, un parallélogramme correspond à un parallélogramme, un parallélépipède à un parallélépipède, le centre d'une conique ou d'une quadrique au centre de la conique ou quadrique homologue. On peut définir la correspondance affine entre deux plans ou deux espaces en faisant correspondre à un triangle ou tétraèdre du premier un triangle ou tétraèdre choisi arbitrairement dans le second. Dans deux figures affines, deux aires homologues ou deux volumes homologues sont toujours dans un rapport constant[181]).

Les figures affines comprennent encore, en particulier, celles qui sont connues sous le nom de figures *semblables*, celles-ci pouvant être envisagées dans la théorie qui nous occupe comme formant soit deux plans en affinité dans lesquels les ombilics se correspondent, soit deux espaces en affinité dans lesquels les ombilicales se correspondent[182]). La similitude comprend elle-même deux cas particuliers, celui des figures *égales* et celui des figures *symétriques*[183]).

Dans des figures affines ou semblables, toutes les relations métriques signalées plus haut se simplifient; il en est de même des propositions concernant les éléments congrus de ces deux figures[184]). En particulier, il résulte des propriétés des faisceaux ou des gerbes homographiques que si, dans deux plans en affinité, on envisage deux

181) On doit à *A. F. Möbius* [J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 109; Werke 1, Leipzig 1885, p. 519] une transformation dans laquelle les volumes conservent leurs rapports, sans que cette transformation soit homographique.

182) Il est assez difficile de préciser à qui est due l'introduction, dans ces définitions, des ombilics (points cycliques) et de l'ombilicale (cercle imaginaire de l'infini); en fait, elle est déjà énoncée, ou tout au moins préparée, dans *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 48, 404; (2e éd.) 1, p. 48, 396.

183) *M. Chasles* [C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860), p. 905] envisage la symétrie plane, sous ce point de vue. Cf. *H. R. Baltzer*, J. reine angew. Math. 52 (1856), p. 146.

184) Voir, par ex. *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 8 (1846), p. 28; *R. Sturm*, Math. Ann. 28 (1887), p. 261; *C. Moshammer*, Sitzgsb. Akad. Wien 74 II (1876), p. 131; *M. Chasles*, Bull. sc. math. astr. phys. chim. 14 (1830), p. 321.

points homologues quelconques P et P' et les angles droits homologues ayant leurs sommets en ces points, les directions des côtés de ces angles sont invariables; il en est de même, dans deux espaces en affinité, des deux trièdres trirectangles homologues ayant leurs sommets en des points homologues; les directions ainsi définies sont appelées *directions principales* [Pour les propriétés métriques de deux figures corrélatives, cf. nº **11**].

10. Les méthodes projectives de génération des figures. La découverte par *J. Steiner* des méthodes projectives de génération des figures géométriques marque une date capitale dans le développement de la géométrie projective. *Vulgarisées presque aussitôt, grâce aux travaux de *M. Chasles*, qui ne connaissait qu'incomplétement ceux de *J. Steiner**, ces méthodes prirent immédiatement une place prépondérante dans les recherches géométriques. Cela tient à ce qu'elles possèdent deux qualités essentielles: la première est d'être facilement accessibles à l'intuition et de se prêter immédiatement à des constructions simples et vraiment géométriques dans la meilleure acception du mot; la seconde est d'être susceptibles des généralisations les plus étendues.

A la vérité, bien avant que *J. Steiner* eût défini systématiquement une conique comme le lieu du point d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques, on connaissait bien des procédés de description des coniques qui se ramènent tous à cette méthode projective générale. Tels sont, en premier lieu, la construction organique des coniques de *I. Newton*[185]) et leur génération, déjà connue de *C. Maclaurin*[186]) et de *W. Braikenridge*[187]), à l'aide de polygones variables *dont les côtés passent par des points fixes et dont les sommets, sauf un, décrivent des droites*. Puis, dès les premières années du 19ième siècle, *J. N. P. Hachette*[188]) donne la génération du cône orthogonal par l'intersection de deux plans rectangulaires tournant respectivement autour de deux droites fixes concourantes, tandis que *J. P. M. Binet*[189]),

185) *Principia math.[86]), (1re éd.) livre 1, lemme 21; (2e éd.) p. 72/4; Opera, éd. *S. Horsley* 2, p. 101; trad. marquise *du Châtelet* 1, p. 93.* Cf. *C. Taylor*, Proc. Cambr. philos. Soc. 3 (1876/80), p. 359, 381.

186) *Philos. Trans. London 39 (1735/6), p. 163.*

187) *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, Londres 1733.* Voir, en ce qui concerne la bibliographie relative à ces auteurs et à d'autres, *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5[2] (1896), Leipzig 1901, p. 9.

188) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 179. **J. N. P. Hachette* traite incidemment cette question à propos du problème d'astronomie: déterminer les jours de l'année où le temps vrai est égal au temps moyen.*

189) Id. 2 (1809/13), p. 71.

généralisant ce résultat, remplace les droites concourantes par deux droites quelconques et obtient ainsi l'hyperboloïde orthogonal. *P. M. N. Benoit*[190]) donne la génération d'une conique à l'aide de deux faisceaux de droites qui tracent sur deux bases fixes des ponctuelles semblables, et montre en outre que les sommets de ces deux faisceaux sont deux points qui peuvent être choisis arbitrairement sur la conique. *G. Giorgini*[191]), envisageant les droites qui partagent les côtés opposés d'un quadrilatère gauche en parties proportionnelles, démontre qu'elles engendrent un paraboloïde hyperbolique, et *M. Chasles* complète immédiatement ce résultat en montrant que la surface devient un hyperboloïde à une nappe lorsque les rapports des segments déterminés par ces droites sur les côtés du quadrilatère sont, non plus égaux, mais proportionnels à deux nombres fixes quelconques[192]).

La génération d'une conique considérée comme enveloppe de ses tangentes avait été également pressentie depuis longtemps. C'est ainsi que *J. H. Lambert* avait démontré que, si une droite variable est coupée dans un rapport constant par les côtés d'un triangle, elle enveloppe une parabole[193]). *La propriété du rapport anharmonique de quatre tangentes à une conique avait été déjà entrevue, dans le cas d'une parabole, par *E. Halley*[194]), qui constate que lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une parabole, toute tangente à cette courbe partage deux côtés opposés du quadrilatère en parties proportionnelles[195]).* Cette proposition est à nouveau démontrée, dans la suite, par *Manderlier*[196]), et *M. Chasles* l'étend à une conique quelconque en montrant que les rapports des segments déterminés sur deux côtés opposés du quadrilatère sont non plus égaux, mais proportionnels à deux nombres fixes. *M. Chasles*[197]) établit en outre la réciproque de cette propriété, où apparaît nettement ce fait capital qu'un rapport anharmonique est constant; *c'est à ce titre qu'il convient de lui attribuer, conjointement avec *J. Steiner*, la génération des coniques à l'aide des faisceaux et ponctuelles homographiques[198]).* Mais c'est surtout ce dernier qui a rattaché ce résultat à des idées d'une portée plus générale et qui a établi le principe général des méthodes projectives de génération des figures.

J. Steiner a été conduit à la génération d'une conique par deux faisceaux homographiques en partant de la propriété évidente du cercle d'être engendré à l'aide de deux faisceaux égaux de rayons et en l'étendant aux coniques par une projection centrale; il arrive de la même manière à la génération par deux ponctuelles homographiques[199]). De là il passe ensuite à la génération des cônes du second degré par deux faisceaux homographiques de plans dont les axes se rencontrent, à celle des quadriques réglées par deux faisceaux homographiques de plans ou par deux ponctuelles homographiques dont les axes ou bases ne sont pas dans un même plan.

C'est à *F. Seydewitz*[200]) que l'on doit, d'une part, la génération des quadriques par l'intersection d'un rayon avec son plan homologue dans deux gerbes réciproques, et d'autre part, la génération des cubiques gauches par l'intersection des rayons homologues sécants dans deux gerbes projectives. *M. Chasles* fit également l'étude de ces cubiques gauches en montrant d'abord qu'une telle courbe est engendrée par le point d'intersection des plans homologues de trois faisceaux projectifs et en démontrant ensuite que les plans issus de deux cordes quelconques de la cubique et projetant un même point de la courbe forment également deux faisceaux homographiques[201]); il en déduit des cons-

---

190) Bull. sc. math. astr. phys. chim. 3 (1823), p. 206.

191) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 440. L'existence de la surface ainsi définie par un quadrilatère gauche et celle de deux systèmes de génératrices rectilignes de cette surface était déjà connue de *Meier Hirsch*, Sammlung geometrischer Aufgaben 2, Berlin 1807, p. 238.

192) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 446. La condition que remplissent les droites variables se ramène immédiatement à l'égalité des rapports anharmoniques qu'elles déterminent sur les deux côtés fixes du quadrilatère; cette remarque a cependant échappé à *M. Chasles* [cf. *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), Leipzig 1901, p. 282 et suiv.].

193) Insigniores orbitae cometarum proprietates, Augsbourg 1761, p. 8; trad. par *J. Bauschinger* dans *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften n° 133, Leipzig 1902, p. 10.

194) *Apollonii Pergaei de sectione rationis libri duo, ex Arabico versi, Oxford 1706, p. 168 (trad. latine de la version arabe de l'ouvrage „De sectione rationis" dont le titre en grec était περὶ λόγου ἀποτομῆς) (Note de *G. Eneström*).*

195) *Voir *M. Chasles*, Aperçu hist.¹), (2ᵉ éd.) p. 155.*

196) Correspondance math. et phys. (de *A. Quetelet*) 4 (1828), p. 155.

197) Correspondance math. phys. (de *A. Quetelet*) 4 (1828), p. 363.

198) C'est un titre que revendique *M. Chasles* lui-même, *C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 1146.* Voir les commentaires que donne, sur cette question, *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), Leipzig 1901, p. 285 et suiv.

199) C'est au moins de cette manière que *J. Steiner* procède [Syst. Entw.[108]), p. 134; Werke 1, p. 329]. Mais ce procédé ne pouvait pas lui permettre d'établir la généralité des courbes engendrées [cf. n° 22]. Dès 1833, dans ses Cours, il emploie une autre méthode qui ne fait intervenir aucune propriété de la circonférence; cf. *J. Steiner*, Synth. Geom.[178]) 2, (1ʳᵉ éd.) Leipzig 1867, préface p. VII.

200) Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 187; (1) 10 (1847), p. 203.

201) La première propriété est donnée Aperçu hist.¹), (2ᵉ éd.) p. 403/7; la seconde, qui en est une conséquence immédiate, n'est cependant énoncée par *M. Chasles*, sans démonstration d'ailleurs, qu'environ vingt ans plus tard [J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 397].

tructions géométriques de la courbe. Enfin c'est *Th. Reye*[202]) qui, dans cette théorie, fait intervenir le système des cordes ou bisécantes de la courbe et montre que ces cordes sont les droites d'intersection des plans homologues de deux gerbes en correspondance homographique.

C'est encore par des correspondances homographiques entre des figures fondamentales que l'on peut engendrer la surface du troisième ordre, la correspondance s'établissant alors, ainsi que l'a montré *H. Grassmann*[203]) entre les plans de trois gerbes; de même enfin, à l'aide d'une correspondance homographique entre deux espaces, on peut engendrer le *complexe tétraédral de Reye*[204]).

Un fait capital est à observer dans toutes ces générations de figures: c'est que les sommets des faisceaux ou des gerbes, les bases des ponctuelles, les axes des faisceaux, etc. ne sont jamais des éléments remarquables de la figure engendrée, et qu'ils peuvent toujours être remplacés par d'autres éléments arbitraires de cette même figure: en général, ce fait fut toujours établi en même temps que le mode de génération correspondant.

La première application de tous ces procédés de génération a consisté à étendre aux figures nouvelles, ainsi engendrées, les notions de figures fondamentales, de correspondance homographique, et même celle de génération projective de figures. Toute conique, toute quadrique réglée, toute cubique gauche peut en effet être regardée comme constituée soit par des points, soit par des droites; chacun de ces éléments est déterminé à l'aide d'autres éléments de figures fondamentales en correspondance homographique, et se trouve donc associé à un élément d'une figure fondamentale; ce résultat conduit immédiatement à la notion du rapport anharmonique de quatre de ces éléments et permet de définir, par exemple, le rapport anharmonique de quatre points d'une conique comme étant celui des quatre rayons du faisceau qui projette ces points d'un sommet choisi arbitrairement sur la courbe. De cette façon enfin, on est amené à envisager une correspondance homographique entre les éléments de deux de ces figures.

C'est ainsi que *J. Steiner*[205]) parle déjà de points conjugués harmoniques sur une conique, et de tangentes également conjuguées harmoniques.

202) Geometrie der Lage, (1re éd.) 2, Hanovre 1868, p. 66; (4e éd.) 2, Stuttgard (Leipzig) 1907, p. 157; trad. française par *O. Chemin* 2, Paris 1882, p. 96.

203) J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 59; Werke 2^1, Leipzig 1904, p. 180. Voir, au sujet des autres modes de génération de figures dus à *H. Grassmann*, l'article III 19.

204) Cette étude a été faite pour la première fois par *Th. Reye*, Geometrie der Lage, (1re éd) 2, Hanovre 1868, (chap. 15); (4e éd.) 3, Leipzig 1910, p. 1; trad. française par *O. Chemin* 2, Paris 1882, p. 149.

205) Syst. Entw.[108]), p. 157; Werke 1, p. 345.

La première notion de ponctuelles homographiques sur une conique semble remonter à *A. Jacobi*[206]). Toutefois c'est *K. G. Chr. von Staudt*[207]) qui, le premier, a envisagé systématiquement des ponctuelles sur une conique (krumme Punktreihe) et leur a étendu les propositions fondamentales; mais il n'applique ces résultats qu'à des propriétés concernant les positions particulières de deux coniques[208]). Ce sont ensuite *H. Schröter*[209]) et *L. Cremona*[210]) qui en font des applications méthodiques et arrivent ainsi à la génération des courbes planes du troisième et du quatrième ordre ainsi que des surfaces réglées du troisième ordre.

La correspondance homographique devait enfin s'étendre à des multiplicités d'ordre plus élevé, formées avec des courbes ou surfaces. Ce sont les méthodes analytiques qui ont donné la première impulsion dans cette voie, et c'est encore à *J. Steiner*[211]) que l'on doit d'avoir établi cette nouvelle généralisation sur des bases purement géométriques. C'est lui qui montre qu'un faisceau de coniques est une multiplicité projective en établissant une correspondance homographique entre chaque conique du faisceau et la tangente à cette conique en l'un des points réels communs à toutes les coniques du faisceau. En reliant ensuite ce faisceau de coniques à un faisceau de rayons par une correspondance homographique, il obtient la génération des cubiques planes[212]). Ainsi était établie, dans la théorie des courbes et surfaces

206) J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 67.

207) Geom. der Lage[158]), p. 149 et suiv.

208) Il envisage principalement des ponctuelles en perspective sur deux coniques ou des ponctuelles en involution sur une même conique, et en fait des applications aux polygones de Poncelet; cf. *A. Göpel*, J. reine angew. Math. 36 (1848), p. 317.

209) J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 31. Cf. *A. Milinowski*, Z. Math. Phys. 18 (1873), p. 288. Il faut remarquer que la méthode ne permet pas d'engendrer toutes les courbes du troisième et du quatrième ordre. Ici encore *I. Newton* [Principia math.[56]), livre 1, lemme 22; Opera, éd. *S. Horsley* 2, p. 108; trad. marquise *du Châtelet* 1, p. 99] est un précurseur à qui est déjà due une génération de ces courbes: cf. *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5^2 (1896), Leipzig 1901, p. 9.

En ce qui concerne l'extension de la méthode à une courbe d'ordre quelconque, voir *A. Milinowski*, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 175.

210) J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 138.

211) Id. 47 (1854), p. 1 [1848]; Werke 2, p. 495. Cf. *J. Steiner*, Synth. Geom.[178]), (2e éd.) 2, p. 224 et suiv.

212) C'est également de cette manière qu'avait auparavant procédé *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 949; 37 (1853), p. 272. *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* montrait d'ailleurs [Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 16 (1862), p. 159] à cette époque, que la description organique des courbes du troisième ordre et du quatrième ordre de *C. Maclaurin* peut se déduire de leur génération par des faisceaux de coniques. Cf. *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 45 (1857), p. 318.

algébriques, la possibilité d'engendrer et de définir des courbes et surfaces d'ordre supérieur à l'aide de faisceaux ou de multiplicités de courbes ou surfaces d'ordre inférieur reliés par une relation homographique[213]). [Cf. III 3 et III 19].

La génération projective des figures s'est encore prêtée à d'autres généralisations, faites dans des sens différents. Ainsi, il peut se faire que ce ne soient pas tous les couples d'éléments homologues qui, par leur intersection on par leur réunion, donnent naissance à un élément d'une figure nouvelle, mais seulement certains couples d'éléments. C'est ainsi que l'on arrive à la génération des cubiques gauches à l'aide de gerbes en correspondance homographique, puis, avec *H. Grassmann*[214]), à celle des cubiques planes à l'aide de trois systèmes plans projectifs superposés, enfin, avec *F. Schur*[215]), à celle d'une certaine classe de surfaces du quatrième ordre à l'aide de quatre espaces en correspondance homographique.

On peut aussi considérer comme des extensions des idées fondamentales de *J. Steiner* la substitution d'une correspondance trilinéaire ou même quadrilinéaire à la correspondance bilinéaire[216]), ainsi que la correspondance, envisagée pour la première fois par *L. Cremona*[217]), entre des figures fondamentales ayant plusieurs déterminations, et son application à la génération de figures de rang supérieur.

Notons un dernier problème qui se rattache aux deux questions

213) *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [Mélanges de géométrie pure, Paris 1856, p. 166] et *L. Cremona*[210]) avaient déjà précédé *J. Steiner* dans cette voie.

214) J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 59; ce procédé de génération a été ensuite exposé en détail par *H. Schröter*, id. 62 (1863), p. 231. D'autres méthodes de génération des figures sont dues à *H. Grassmann* [J. reine angew. Math. 36 (1848), p. 177/84; 42 (1851), p. 187/92, 204/12; 44 (1852), p. 1/25; 52 (1856), p. 254/75; Werke 2^1, publ. par *E. Study*, *G. Scheffers* et *F. Engel*, Leipzig 1904, p. 73/9, 80/5, 99/108, 109/35, 218/38].

215) Math. Ann. 18 (1881), p. 27.

216) Cf. *F. August* [Diss. Berlin 1862] qui donne une génération des surfaces du troisième ordre à l'aide de trois faisceaux liés par une correspondance trilinéaire. Voir aussi *F. London*, Math. Ann. 44 (1894), p. 375 [cf. nº **25**]. *C. Le Paige* [Acta math. 5 (1884/5), p. 195] a employé, pour engendrer une surface du troisième ordre, une correspondance quadrilinéaire entre quatre ponctuelles qu'il projette de quatre droites d'un plan ε: le lieu des points communs à quatre plans se correspondant est formé d'une surface du troisième ordre et du plan ε. Voir aussi *F. Schur*, Ber. Ges. Lpz. 36 (1884), math. p. 128.

217) Cette idée a été ensuite reprise et développée par *Em. Weyr*, „Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde auf den algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse, Leipzig 1865; Geometrie der räumlichen Ergebnisse 1—2-deutiger Gebilde insbesondere der Regelfläche dritter Ordnung, Leipzig 1870 (Note de *G. Loria*).*

précédentes; il concerne l'étude de l'ensemble des générations de même nature avec lesquelles on peut former une même figure[218]). Cette question se rattache essentiellement aux travaux de *Th. Reye*[219]) et de *F. Schur*[220]); elle a conduit à son tour à de nouveaux problèmes, d'une portée considérable, sur les courbes, les surfaces et les ensembles de lignes.

11. Correspondances homographiques ou réciproques entre éléments d'une même figure fondamentale. Lorsque deux ponctuelles homographiques ou deux faisceaux homographiques sont superposés, c'est-à-dire ont même base ou même sommet, il existe deux éléments, appelés *éléments doubles,* qui se correspondent à eux-mêmes. Si les deux figures, supposées décrites simultanément par leurs éléments homologues, sont parcourues en sens contraires, ces éléments doubles sont toujours réels; si les deux figures sont parcourues dans le même sens, les éléments doubles peuvent être soit réels, soit imaginaires, soit confondus. S'il s'agit par exemple de deux ponctuelles homographiques de même base, la nature de leurs points doubles dépend de la situation respective des points de fuite et des points de puissance [nº **9**]; les points doubles sont réels confondus ou imaginaires, suivant que RQ' est supérieur, égal, ou inférieur à GH[221]).

Ces éléments doubles, $M, N,$ jouissent de cette propriété caractéristique que le rapport anharmonique $(MNAA')$, qu'ils forment avec deux éléments homologues quelconques A, A', garde une valeur constante λ[222]).

On doit à *J. Steiner* deux méthodes, d'un intérêt théorique capital, qui permettent de construire les éléments doubles. La première repose sur les deux relations

$$RM + MQ' = RQ', \quad MQ' \cdot MR = \frac{1}{4}\overline{GH}^2.$$

La seconde fait intervenir un cercle fixe sur lequel on projette les deux ponctuelles homographiques, et ramène alors le problème à la détermination des points doubles de deux ponctuelles homographiques tracées sur une même conique [nº **10**]. Une troisième construction, „déduite de la théorie de l'involution*, sera donnée au nº **13**.

218) *F. Seydewitz* [Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 158] avait déjà constaté qu'une même quadrique peut être engendrée d'une infinité de manières, suivant le choix des sommets des deux gerbes, à l'aide de deux gerbes réciproques.

219) J. reine angew. Math. 74 (1872), p. 1; 104 (1889), p. 211/40; 106 (1890), p. 30/47, 315/30; 107 (1891), p. 162/79; 108 (1891), p. 89/124.

220) Math. Ann. 18 (1881), p. 1, en note.

221) Dans le cas $RQ' = GH$ l'un des deux couples de points de puissance, G, G' ou H, H', est formé de deux points confondus, et constitue l'un des points doubles.

222) „Cf. *M. Chasles*, Géom. sup.[29]), (1re éd.) p. 107; (2e éd.) p. 100.*

Cette construction des points doubles de deux ponctuelles homographiques de même base permet de résoudre géométriquement un grand nombre de problèmes de géométrie par l'emploi d'un cercle fixe unique sur lequel on définit, avec les données du problème, deux ponctuelles homographiques. Tels sont, par exemple, certains problèmes, dits de *fermeture*, qui consistent à construire un polygone circonscrit à un polygone donné et inscrit dans un autre ou, en particulier, dans le même[223]). On désigne ces problèmes sous le nom de problèmes du *second ordre*[224]), par opposition avec une catégorie étendue d'autres problèmes, dits du *premier ordre*, que l'on peut résoudre par l'emploi de la règle seulement[225]).

Dans le cas particulier de deux ponctuelles semblables appartenant à une même droite, ou encore de deux ponctuelles égales mais de sens contraires, l'un des points doubles est rejeté à l'infini, l'autre restant à distance finie; dans le cas de deux ponctuelles égales et de même sens, les deux points doubles sont tous deux rejetés à l'infini. Dans le cas de deux faisceaux homographiques égaux et de même sens, *c'est-à-dire déterminés par les deux côtés d'un angle constant qui pivote autour de son sommet*, les rayons doubles sont les rayons *isotropes* ou *minima*, c'est-à-dire les droites imaginaires qui joignent le sommet de l'angle aux deux ombilics du plan.

Passons aux figures planes. Lorsque deux systèmes plans projectifs sont superposés, autrement dit, lorsque l'on envisage une transformation homographique d'un plan en lui même, il existe en général un triangle (*triangle fondamental, Hauptdreieck*) dont les sommets P_1, P_2, P_3 et les côtés p_1, p_2, p_3 sont les éléments doubles de la transformation, c'est-à-dire les éléments qui se confondent avec leurs homologues[226]). Si A et A' sont deux points homologues quelconques, d et d' deux droites homologues quelconques de ces deux plans, le rapport anharmonique du faisceau $A(P_1P_2P_3A')$ est constant ainsi que celui de la ponctuelle $d(p_1p_2p_3d')$ déterminée sur la droite d par les quatre droites p_1, p_2, p_3, d'; de plus, ces deux rapports sont égaux entre eux[227]). Ce fait peut aussi s'exprimer, d'après *K. G. Chr. von Staudt*, soit par la relation[228])

$$P_1P_2P_3AA' \barwedge P_1P_2P_3BB',$$

soit encore en disant que les trois côtés p_1, p_2, p_3 déterminent sur toute droite AA', qui joint deux points homologues quelconques, trois points formant avec A et A' un jet projectif à tout jet analogue; réciproquement, cette propriété caractérise une transformation homographique d'un plan ayant ce triangle $P_1P_2P_3$ pour triangle fondamental. Chaque couple de points homologues, A, A', forme ainsi avec P_1, P_2, P_3 un *jet invariant* de la transformation [n° 8].

La nature de ces éléments doubles permet de répartir les transformations homographiques d'un plan en lui-même en cinq classes distinctes: dans les quatre premières, ou bien les points doubles sont tous trois réels et distincts, ou bien un seul est réel et les deux autres imaginaires, ou encore deux de ces points, ou même les trois, sont

223) Un grand nombre de problèmes de cette espèce, ainsi que d'autres, sont traités dans les premiers volumes des Annales de mathématiques pures et appliquées par *F. J. Servois, J. D. Gergonne, S. L'Huilier* (voir en partic. Ann. math. pures appl. 2 (1811/2), p. 116 et p. 285); puis par *J. V. Poncelet*, Ann. math. pures appl. 8 (1817/8), p. 141.

Voir également *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 345; (2e éd.) 1, p. 333, et surtout *J. Steiner*, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833; Werke 1, Berlin 1881, p. 461.

J. V. Poncelet [Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 135; (2e éd.) 1, p. 130] avait établi le premier que l'on peut résoudre, avec la règle, tous les problèmes du second ordre, si l'on connaît un cercle fixe et son centre. *J. Steiner* est allé ensuite plus loin, en montrant que la connaissance du centre de ce cercle n'est pas indispensable, et en déterminant les points doubles des deux ponctuelles homographiques par la seconde des deux méthodes que nous avons citées plus haut. Cf. *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5^2 (1896), Leipzig 1901, p. 135.

La méthode dite de fausse position consiste également dans la détermination des éléments doubles d'une correspondance homographique entre éléments d'une même figure. Voir, par ex. *L. Cremona*, Geom. proiettiva[146]); trad. par *E. Dewulf*, p. 181; **M. Chasles*, Géom. sup.[29]), (1re éd.) p. 212; (2e éd.) p. 199.*

224) L'un des plus importants de ces problèmes du second ordre est celui de la construction des deux droites qui rencontrent quatre droites données. Une première solution de ce problème fut donnée par *Ch. J. Brianchon* et *A. Petit*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 434, 436; d'autres furent données ensuite, par *E. Bobillier* et *H. Garbinsky* [Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 182] puis par *J. Steiner* [J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 268/75; Werke 1, Berlin 1881, p. 147]. Enfin *J. Steiner* [Syst. Entw.[108]), p. 242; Werke 1, p. 402] en donne encore une autre solution, fondée sur la considération des éléments doubles d'une homographie.

225) Ces solutions reposent le plus souvent sur la considération de lignes droites dont les points d'intersection peuvent être construits avec la règle seulement; quelques-unes reposent aussi sur les propriétés du quadrilatère complet, ou sur les théorèmes de Desargues et de Pascal.

226) *Cf. *M. Chasles*, Géom. sup.[29]), (1re éd.) p. 403; (2e éd.) p. 374.*

227) Cf. *Chr. Beyel*, Z. Math. Phys. 31 (1886), p. 147; 37 (1892), p. 59.

228) Beiträge[395]), fasc. 3, p. 332; cf. *G. Kohn*, Math. Ann. 46 (1895), p. 285. Il faut remarquer que les trois rapports anharmoniques λ', λ'', λ''' déterminés respectivement sur chacun des trois côtés p_1, p_2, p_3 par les deux autres et par deux droites homologues quelconques sont liés par la relation $\lambda'\lambda''\lambda''' = 1$.

confondus en un seul. On peut se représenter d'une façon simple tous ces cas en envisageant deux gerbes distinctes en correspondance homographique et en les coupant par un même plan; ces deux gerbes engendrent, comme on l'a vu, une cubique gauche, et suivant la nature des points d'intersection de cette cubique et du plan, on obtient les divers cas de la transformation homographique[229]). Reste enfin un dernier cas, dans lequel il y a ∞^1 points doubles; c'est celui des figures homologiques que nous étudierons en particulier au n° **12**.

Lorsque la transformation homographique est une transformation par *affinité*, il n'y a plus, en général, qu'un seul point double à distance finie, le *centre d'affinité* *et deux droites doubles à distance finie, issues de ce point.* Ce point devient un *centre de similitude*, lorsque les deux figures deviennent des figures *semblables*, et un *centre de rotation*, lorsqu'elles deviennent des figures *égales*: dans ces deux derniers cas, les deux autres points doubles sont imaginaires et sont les ombilics du plan [cf. IV 6, **1**].

En se limitant à l'espace ordinaire, deux espaces projectifs (ou collinéaires) Σ, Σ' sont toujours superposés. La transformation admet alors, en général, comme éléments doubles, les quatre sommets P_i, les quatre faces π_i et les six arêtes p_{ik} d'un tétraèdre, dit *tétraèdre fondamental (Haupttetraeder)*; ce tétraèdre a toujours au moins deux arêtes opposées réelles[230]). La relation fondamentale entre éléments homologues s'exprime alors par la relation[231])

$$P_1 P_2 P_3 P_4 A A' \barwedge P_1 P_2 P_3 P_4 B B';$$

elle exprime que toute droite qui joint deux points homologues quelconques rencontre les faces du tétraèdre $P_1 P_2 P_3 P_4$ en quatre points dont le rapport anharmonique est constant, que les plans menés respectivement par cette droite et les quatre sommets de ce tétraèdre ont également un rapport anharmonique constant, enfin que ces deux rapports sont égaux. Ces droites forment ainsi un complexe tétraédral Γ.

Il y a ici, dans le cas de l'espace, treize formes distinctes de transformations homographiques; elles ont été mises en évidence à l'aide de considérations géométriques, par *K. G. Chr. von Staudt*[232]). Parmi

229) Cf. *G. Loria,* Giorn. mat. (1) 22 (1884), p. 1.

230) Cf. *H. Schoute,* Archives néerland. sc. Harlem 6 (1871), p. 348; *J. Lüroth,* Math. Ann. 18 (1878), p. 311.

231) *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge[396]), fasc. 3, p. 332. Cf. *G. Kohn,* Math. Ann. 46 (1895), p. 285.

232) Beiträge[396]), fasc. 3, p. 328. Cf. *G. Battaglini,* Giorn. mat. (1) 14 (1876), p. 115; Rendic. Accad. Napoli (1) 13 (1876), p. 2; *G. Loria,* Giorn. mat. (1) 22 (1884), p. 1; *H. B. Newson,* The Quart. Univ. Kansas 6 (1897), p. 63; *Cl. Servais,* Acad. Belgique, classe sc. Mém. in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 9.* *Pour la théorie analytique et la bibliographie ainsi que pour l'extension à l'hyperespace, cf. *E. Bertini,* Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Pise 1907, p. 63/100.*

elles, les formes particulières les plus importantes sont les formes involutives, qui seront étudiées plus loin [n° **13**], et les suivantes.

La première, appelée *homographie axiale*[233]), est celle dans laquelle l'ensemble des éléments doubles est constitué par tous les points qui appartiennent à une certaine droite d, et par tous les plans qui passent par une autre droite d'.

Dans la seconde, appelée *homographie biaxiale*[234]) ou *homographie gauche (gescharte)*, il existe deux droites remarquables d et d' telles que tout point situé sur l'une d'elles, ou tout plan passant par l'une d'elles, est un élément double, de sorte que la droite qui joint deux points homologues quelconques ou qui est l'intersection de deux plans homologues quelconques s'appuie sur ces deux droites d et d'.

Dans une troisième forme enfin, il existe un plan ε dont tous les points et toutes les droites sont éléments doubles et une gerbe M dont tous les plans et tous les rayons sont également éléments doubles: cette forme est appelée *homographie centrale* ou encore *transformation homologique.*

Si l'on envisage le complexe tétraédral formé par les droites qui joignent deux points homologues, il se décompose, dans le cas de l'homographie axiale, en deux complexes linéaires *spéciaux*; dans le cas de l'homographie biaxiale, il dégénère en une congruence linéaire dont les directrices sont les droites d et d', et dont les rayons sont les droites doubles de la transformation; enfin, dans le cas de l'homographie centrale, il se décompose encore en un système plan de droites, celui des droites situées dans le plan d'homologie ε, et en une gerbe de droites, celle des droites qui passent par le centre d'homologie M, toutes ces droites étant encore des éléments doubles[235]). Dans ces deux derniers cas, tout couple de deux points homologues A, A' donne un rapport anharmonique constant, $(d d' A A')$ ou $(M \varepsilon A A')$.

Dans le cas particulier où les figures homographiques sont affines,

233) Cf. *F. Schur,* Math. Ann. 19 (1882), p. 431; c'est à *F. Schur* qu'est dû le terme *axiale.*

234) *Cf. *J. J. Sylvester,* C. R. Acad. sc. Paris 101 (1885), p. 35, 139.*

235) La classification des transformations homographiques, basée sur la considération du complexe tétraédral, est indiquée incidemment par *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 98 II[a] (1889), p. 592; Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 371.

ou semblables, ou égales, il y a lieu de signaler certaines propriétés remarquables. Dans ces cas, le tétraèdre des éléments doubles comprend toujours une face formée par le plan de l'infini, de sorte qu'il n'y a en général qu'un seul point double à distance finie: c'est, suivant les cas, *le centre d'affinité* ou le *centre de similitude.* Dans le cas des figures semblables ou égales, l'ombilicale se correspond à elle-même; deux des points doubles sont situés sur l'ombilicale aux points où elle rencontre une droite réelle; le pôle de cette droite par rapport à l'ombilicale est le troisième point double situé dans le plan de l'infini; par ce point enfin passe la seconde arête réelle, située à distance finie, du tétraèdre fondamental, et l'une des faces du tétraèdre fondamental est perpendiculaire à cette droite[236]). Dans le cas des figures égales, cette droite est l'axe du déplacement hélicoïdal ou du mouvement de rotation qui amène les deux figures à coïncider point par point[237]); dans le cas de deux figures semblables, une rotation autour de cette droite rend les deux figures homothétiques par rapport au centre de similitude. Ce dernier cas des figures homothétiques constitue également un cas particulier de deux figures homologiques.

Un autre cas remarquable de figures homographiques est celui où deux figures planes collinéaires superposées ont en commun une conique dont les points se correspondent deux à deux sans être points doubles. Lorsqu'une pareille conique existe, il en existe en outre une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété, et toutes ces courbes forment une famille de coniques bitangentes dont les points de contact et les tangentes communes sont sommets et côtés du triangle fondamental. On dit alors que la transformation homographique est une transformation d'Hermite[238]), *du nom de *Ch. Hermite,* qui l'a rencontrée dans la recherche de substitutions linéaires laissant invariante une forme quadratique.* *Nous venons de rencontrer un exemple de cette transformation dans le cas des figures égales, où la famille de coniques bitangentes est alors constituée par les courbes suivant lesquelles le plan de l'infini coupe les cônes de révolution ayant un même axe, celui du déplacement hélicoïdal.*

D'une façon analogue une collinéation de l'espace peut conserver des coniques, des cubiques gauches ou des quadriques.

236) Cf. *C. Moshammer,* Sitzgsb. Akad. Wien 74 II (1876), p. 131.

237) Pour plus de détails, voir IV 6, **1**; l'étude des cas d'exception, ainsi que celle des figures symétriques, est traitée dans cet article.

238) J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 313. *G. Kohn* [Math. Ann. 46 (1895), p. 294] donne la condition que doit remplir, dans ce cas, le jet [n° 8] correspondant à la transformation.

On peut arriver à la notion d'éléments doubles dans la transformation homographique d'une figure fondamentale par la considération d'une succession d'éléments qui tendent vers une limite. Ce procédé a été employé, pour la première fois, par *G. Battaglini*[239]) et *Ed. Weyr*[240]).

Envisageons d'abord deux ponctuelles homographiques portées sur une même droite; à un point quelconque A_0 de la première ponctuelle correspond un point A_0' de la seconde; ce point A_0' coïncide avec un point A_1 de la première ponctuelle, lequel correspond à son tour à un point A_1' de la seconde ponctuelle, et ainsi de suite; cette suite de points $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ tend vers l'un des deux points doubles supposés réels des ponctuelles homographiques. Si ensuite, inversement, on envisage successivement le point A_{-1}' de la seconde ponctuelle qui coïncide avec A_0, et son homologue A_{-1} dans la première ponctuelle, puis le point A_{-2}' de la seconde ponctuelle qui coïncide avec A_{-1} et son homologue A_{-2} dans la première, et ainsi de suite, la suite des points $A_{-1}, A_{-2}, \ldots$ tend vers le second point double.

Dans la transformation homographique d'un plan, le même procédé, appliqué aux points de ce plan, donne deux des points doubles de la transformation; appliqué aux droites, il donne deux des droites doubles. Ce point a été principalement étudié par *F. Amodeo*[241]).

A. Clebsch[242]) a envisagé aussi une succession d'éléments formée par un procédé analogue: sa méthode repose sur ce fait que les diagonales d'un pentagone forment un second pentagone qui est une figure homographique du premier; si l'on opère ensuite sur ce second pentagone comme on a opéré sur le premier, et ainsi de suite, on forme une succession de pentagones qui tendent vers un point limite et ce point limite est un point double d'une transformation homographique.

Après les correspondances homographiques, on peut envisager de même les correspondances corrélatives entre deux figures fondamentales appartenant à une même multiplicité. Leur étude a été faite, pour la première fois, par *F. Seydewitz*[243]) qui se bornait au cas des figures planes. Les éléments qui jouent un rôle capital dans la question sont

239) Giorn. mat. 1 (1) (1863), p. 231.

240) Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1869, p. 3.

241) Giorn. mat. (1) 27 (1889), p. 40; cf. *M. Genty,* Bull. Soc. math. France 21 (1893), p. 145; *T. Brodén*, Ueber die Iteration ternärer Kollineationen mit rationalen Coefficienten, Lund 1899.

242) Math. Ann. 4 (1871), p. 476.

243) Archiv Math. Phys. (1) 8 (1846), p. 1.

alors les deux points *(centres)* qui correspondent à la droite de l'infini, et deux rayons rectangulaires, menés par chacun d'eux, respectivement conjugués [n° 8] les uns des autres. Si l'on déplace les deux figures de manière que ces éléments viennent coïncider, on obtient deux figures polaires réciproques [n° **13**]. Dans le plan il existe en outre deux coniques remarquables c et γ; la première, c, est le lieu des points qui se trouvent sur leurs droites homologues, et la seconde, γ, l'enveloppe des droites qui passent par leurs points homologues; ces deux coniques c et γ sont bitangentes. Inversement, un système de deux coniques bitangentes c et γ permet toujours de définir une transformation corrélative d'un plan.

Une transformation corrélative d'un plan permet de définir une correspondance quadratique entre les points de ce plan; nous y reviendrons plus loin [n° **26**].

Dans la transformation corrélative d'une gerbe il existe toujours, ainsi que l'a montré *H. Schröter*[244]), deux trièdres trirectangles qui se correspondent; si l'on amène ces deux trièdres à coïncider, les deux gerbes deviennent deux figures polaires réciproques, et les arêtes de ces trièdres coïncident alors avec les directions principales du cône directeur de la transformation par polaires réciproques.

Des propositions analogues concernent la transformation corrélative de l'espace[245]): ici encore interviennent certains éléments remarquables: c'est d'abord, dans chaque espace, un point appelé *centre*, l'homologue du plan de l'infini, puis un trièdre trirectangle ayant ce point pour sommet et qui, associé au plan de l'infini, forme un tétraèdre dont le tétraèdre corrélatif est constitué de la même manière avec un trièdre trirectangle et le plan de l'infini. De même, il existe deux quadriques remarquables F et Φ; la première, F, est le lieu des points qui se trouvent dans leurs plans homologues; la seconde, Φ, est l'enveloppe des plans qui passent par leurs points homologues; ces deux quadriques se coupent suivant les arêtes d'un quadrilatère gauche, et chacune de ces quatre arêtes est à elle-même son homologue. Ensuite, si l'on associe, dans les deux espaces, les deux points qui correspondent à un même plan, la droite qui les joint engendre un complexe du second ordre dont la surface des singularités se décompose

244) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 105. *H. Schröter* [Oberflächen zweiter Ordnung[170]), p. 422 (§ 49 et 50)] donne une discussion complète de la transformation corrélative d'un plan ou d'une gerbe.

245) Cf. *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 105; *R. Sturm*, Math. Ann. 19 (1882), p. 461.

en deux quadriques F et Φ[246]). En dernier lieu, si l'on envisage les ponctuelles qui forment une involution avec les faisceaux de plans qui leur correspondent, les supports de ces ponctuelles engendrent un complexe linéaire[247]).

La considération de tous ces éléments, c'est-à-dire des quadriques F et Φ, ainsi que des deux complexes dont nous venons de parler, a permis à *D. Montesano*[248]) de donner une classification complète de toutes les transformations corrélatives possibles de l'espace.

Étant données dans l'espace deux figures corrélatives, on peut toujours, en général, les déplacer de façon à en faire des figures polaires réciproques[249]) [n° **13**]: le seul cas d'exception est celui où les deux centres de ces figures sont tous deux rejetés à l'infini. Mais, dans ce cas, il peut encore arriver, sous certaines conditions, que l'on puisse amener les deux figures à être polaires réciproques par rapport à un paraboloïde. Dans l'hypothèse où ce paraboloïde est de révolution, *G. Hauck*[250]) a montré que l'on peut en outre, „par une symétrie par rapport au plan tangent au sommet du paraboloïde, suivie d'une rotation d'un angle droit autour de son axe", rendre les deux figures corrélatives par rapport à un complexe linéaire [n° **13**]; dans l'hypothèse où le paraboloïde est équilatère, on arrive au même résultat „par une symétrie autour d'une génératrice de ce parabololoïde issue de son sommet."

Cas remarquables de transformations homographiques ou corrélatives.

12. Positions remarquables de deux figures homographiques. Si l'on envisage les diverses particularités que peut présenter la disposition de deux figures homographiques, le cas le plus important est celui des *figures en perspective*, et plus particulièrement encore, celui des *figures homologiques* [n^os^ **8** et **9**]. Les propositions fondamentales relatives aux correspondances projective et homographique conduisent à cette conséquence immédiate que deux ponctuelles projectives sont perspectives lorsque leur point d'intersection est à lui-même son homologue, et que deux systèmes plans projectifs sont également en perspective lorsque chaque point de leur droite d'intersection est à lui-

246) Cf. *R. Sturm*, Math. Ann. 28 (1887), p. 269.

247) *R. Sturm*, Math. Ann. 19 (1882), p. 475; 28 (1887), p. 268.

248) Su la corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio, Naples 1885.

249) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 79 (1876), p. 168.

250) Z. Math. Phys. 31 (1886), p. 362. Cf. *C. Segre* [Giorn. mat. (1) 25 (1887), p. 20] qui établit les relations métriques les plus importantes existant entre les deux figures.

même son homologue. Les propositions corrélatives concernent les faisceaux et les gerbes. Il résulte en particulier de ces propositions que lorsque deux plans se correspondent homographiquement, sans que cette correspondance soit une affinité, on peut toujours, en les déplaçant d'une manière convenable, les amener à être en perspective[251]): ces deux plans contiennent, en effet, deux divisions homologues égales [n° **9**].

Si deux systèmes plans projectifs sont superposés, ils sont en perspective, et l'on dit alors qu'ils forment deux *figures homologiques*, lorsqu'il existe une droite u, appelée *axe d'homologie*, dont chaque point est à lui-même son homologue, et un point S, appelé *centre d'homologie*, sommet d'un faisceau dont chaque rayon est à lui-même son homologue. Dans le cas général où le centre d'homologie n'est pas sur l'axe d'homologie, cette correspondance est définie par la condition que deux points homologues quelconques A, A' soient situés sur une droite qui passe par S et rencontre u en un point V tel que le rapport anharmonique

$$(VSAA')$$

soit constant. Un cas particulier remarquable de deux figures homologiques est celui de deux figures homothétiques: dans ce cas, l'axe d'homologie est la droite de l'infini, et le centre d'homologie est placé au centre d'homothétie: c'est à *J. V. Poncelet*[252]) qu'est due cette remarque [n° **4**].

De même, dans l'espace, deux figures homographiques sont en perspective et sont appelées *figures homologiques*, lorsqu'elles ont en commun tous les points d'un plan ε, appelé *plan d'homologie*, et tous les rayons d'une gerbe dont le sommet S est appelé *centre d'homologie*; dans le cas général où le centre d'homologie n'est pas dans le plan d'homologie la correspondance est définie, comme dans le plan, par la condition que deux points homologues quelconques A, A' forment avec le plan d'homologie ε et le centre d'homologie S un rapport anharmonique constant

$$(\varepsilon SAA').$$

251) *Cf. *M. Chasles*, Géom. sup.[29]), (1^re^ éd.) p. 407; (2^e^ éd.) p. 377.* Lorsque la correspondance est une affinité, il peut encore arriver, moyennant une certaine condition, que l'on puisse amener les deux plans à être en perspective parallèle (perspective dont le centre est à l'infini). Cf. note 257.

252) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 173; (2e éd.) 1, p. 167/8. *J. V. Poncelet* remarque également que deux coniques bitangentes définissent une homologie qui a pour axe la corde des contacts et pour centre le pôle commun de cette corde. *A. Emch* [Diss. Kansas 1896] a rattaché à cette remarque une détermination des divers cas que peut présenter une homologie dans le plan.

Cette notion de figures homologiques dans l'espace apparaît pour la première fois dans *J. V. Poncelet*[253]) [n° **4**], sous le nom de *perspective-relief*. La correspondance homologique entre deux figures de l'espace est aussi appelée *collinéation centrale (zentrische Kollineation)*.

Contrairement à ce qui se passe dans le plan, on ne peut pas, en général, en déplaçant deux espaces projectifs, les amener à être en perspective[254]): c'est ce qu'ont constaté presque simultanément *E. Mægis*, *L. F. Painvin*, et *H. J. S. Smith*. La condition pour que cette opération soit possible peut s'énoncer de diverses manières: c'est, d'après *L. F. Painvin*[255]), que l'homologue de l'ombilicale de chacun des espaces Σ et Σ' soit également un cercle et, d'après *E. Mægis*[255a]) et *H. J. S. Smith*[256]), que l'ellipse focale du système de quadriques homofocales signalé au n° **9** se réduise à un cercle. *G. Hauck* a encore énoncé cette condition sous une troisième forme: il envisage deux points homologues quelconques P, P', puis les deux trièdres trirectangles ayant ces deux points pour sommets et dont les arêtes u, v, w de l'un sont respectivement homologues des arêtes u', v', w' de l'autre, ensuite les points U_1, V_1, W_1 de l'espace Σ, homologues des points à l'infini de u', v', w', et les points U_2', V_2', W_2' de l'espace Σ', homologues des points à l'infini de u, v, w; la condition cherchée est alors que les deux triangles $U_1 V_1 W_1$ et $U_2' V_2' W_2'$ soient semblables[257]).

253) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 374; (2e éd.) 1, p. 363/4. C'est également à ce propos que *J. V. Poncelet* établit la propriété des tétraèdres homologiques, propriété que devait retrouver plus tard *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 38; Werke 1, Berlin 1881, p. 3.

254) La collinéation la plus générale dépend, en effet, de 15 paramètres; l'homologie en renferme 7 qui définissent le centre d'homologie S, le plan d'homologie ε et le rapport anharmonique constant; si l'on ajoute à ces 7 paramètres les 6 paramètres du déplacement le plus général, on n'obtient donc que 13 paramètres. On ne peut non plus, en général, trouver un déplacement qui transforme une collinéation entre deux espaces en une homographie biaxiale; cf. Mlle *L. Bortniker* [C. R. Acad. sc. Paris 104 (1887), p. 771] et *G. Darboux* [id. p. 773].

255) Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 97; *G. Kilbinger* [Diss. Strasbourg 1880] énonce le même fait en disant qu'il doit exister des sphères homologues dans les deux espaces Σ, Σ'.

255a) Diss. Königsberg 1868.

256) Proc. London math. Soc. (1) 2 (1866/9), p. 196. Cf. *E. Dewulf*, Bull. sc. math. (2) 1 (1877), p. 137; **C. Housel*, Nouv. Ann. math. (2) 8 (1869), p. 492;* *G. Bellavitis*, Atti Ist. Veneto (4) 15 (1870), p. 876.

257) Z. Math. Phys. 21 (1876), p. 413. Lorsque deux espaces sont reliés par une correspondance affine, on peut encore parfois, sous une condition énoncée par *A. Beck* [Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 5], les amener à être placés en perspective parallèle. Si l'on envisage les trois directions principales de l'un de ces espaces, c'est-à-dire les trois directions, deux à deux rectangulaires, qui correspondent à

Lorsque trois plans, reliés deux à deux par une correspondance homologique, coïncident, les trois centres d'homologie sont en ligne droite et les trois axes d'homologie concourent en un même point. Une proposition analogue, quoique moins simple, s'applique à trois espaces: deux cas sont alors possibles, ou bien les trois plans d'homologie coïncident et alors les trois centres d'homologie sont en ligne droite, ou bien les trois centres coïncident et alors les trois plans d'homologie concourent suivant une même droite[258]).

Toutes les recherches qui concernent les figures en perspective ou homologiques ont eu comme point de départ l'étude des triangles et des tétraèdres en perspective. *G. Desargues* avait déjà remarqué que l'on peut toujours amener deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ à être en perspective. Puis, *Ch. J. Brianchon* avait constaté que, si deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont en perspective, les triangles A_1BC et AB_1C_1, AB_1C et A_1BC_1, ABC_1 et A_1B_1C le sont également, et par rapport au même centre[259]). D'ailleurs toutes ces propositions de géométrie plane, concernant les triangles homologiques, avaient été établies depuis longtemps, d'une manière simple, en projetant certaines figures de l'espace[260]).

Le progrès le plus important réalisé ensuite dans cette théorie est dû à *J. Rosanes* et *H. Schröter*[261]), lesquels remarquèrent que, dans un même plan, deux triangles peuvent être simultanément, de plusieurs manières différentes, la perspective l'un de l'autre: suivant les cas, ils peuvent l'être de deux, trois, quatre ou six manières, cette dernière hypothèse ne pouvant d'ailleurs jamais être réalisée dans le domaine réel[262]). Le cas de triangles homologiques de quatre manières différentes se rattache directement à l'étude de l'*hexagone de Clebsch*, lequel peut, de dix manières différentes, être envisagé comme un *hexa-*

trois autres directions, deux à deux rectangulaires, la condition pour qu'il en soit ainsi est que le facteur de proportionnalité correspondant dans la transformation à l'une de ces trois directions soit égal à l'unité. C'est une condition analogue que l'on rencontre dans le cas de figures planes: voir note 251.

258) *C. Rodenberg*, Z. Math. Phys. 30 (1885), p. 113. Ces propositions ont des réciproques. *Par exemple, deux figures homologiques d'une troisième par rapport à un même plan d'homologie et à deux centres d'homologie différents, sont homologiques entre elles, le plan d'homologie étant encore le même.*

259) J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 297.

260) Voir note 377.

261) Math. Ann. 2 (1870), p. 549, 553. Cf. *J. Vályi*, Archiv Math. Phys. (1) 70 (1884), p. 105; Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 169.

262) *F. W. Kirchner* [Diss. Halle 1888] détermine d'autre part l'ensemble de tous les triangles qui sont en perspective avec 1, 2, 3, 4 ou 6 triangles donnés.

gone de Brianchon[263]): cet hexagone jouit de cette propriété que, quelle que soit la façon dont on le décompose en deux triangles, ceux-ci sont homologiques de quatre manières[264]).

Deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique sont homologiques[265]), et réciproquement, si deux triangles sont homologiques, il existe une conique par rapport à laquelle ils sont polaires réciproques[266]). Cette propriété donne naissance à un grand nombre de propositions sur les polygones homologiques[267]).

Dans l'étude des tétraèdres, on constate qu'il peut exister des tétraèdres qui sont homologiques de deux manières différentes, d'autres qui le sont de quatre. Ce dernier cas peut en outre être réalisé de deux manières différentes, dont la plus importante constitue ce que l'on appelle des *tétraèdres desmiques*: l'existence de ceux-ci a été constatée, pour la première fois, par *O. Hermes*[268]); mais c'est principalement *C. Stephanos*[269]) qui a établi leurs propriétés essentielles et montré qu'ils apparaissent dans un grand nombre de configurations géométriques remarquables. Signalons seulement, à leur sujet, que les quatre centres d'homologie de deux tétraèdres desmiques forment un troisième tétraèdre qui est également homologique de chacun des deux premiers par rapport à chacun des sommets de l'autre[270]).

263) Le type le plus simple de *l'hexagone de Clebsch* est réalisé dans la géométrie de la gerbe, et constitué par les six diagonales de l'icosaèdre régulier. Cf. *F. Klein*, Math. Ann. 12 (1877), p. 531.

264) Voir principalement *H. Schröter* [Math. Ann. 28 (1887), p. 457] et *E. Hess* [id. 28 (1887), p. 167] qui étudie complètement toutes les questions se rattachant à cet hexagone.

265) Cette proposition est due à *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 11; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 134; *A. Descos* [Nouv. Ann. math. (1) 4 (1845), p. 352] en donne une démonstration analytique et, dans une note placée à la suite de cet article, *O. Terquem* remarque qu'on peut la regarder comme une conséquence d'un théorème de *M. Chasles* [Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 65] *sur la figure formée par un trièdre et son triangle polaire réciproque par rapport à une quadrique.* Cf. *K. G. Chr. von Staudt*, Geom. der Lage[155]), p. 135.

266) *J. Vályi* [Archiv Math. Phys. (2) 2 (1885), p. 320] *étudie des triangles n fois homologiques et les n coniques correspondantes.*

267) Voir par ex. *S. Kantor*, Sitzgsb. Akad. Wien 80 II (1879), p. 715; *A. Keller*, Diss. Giessen 1888.

268) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 218; 100 (1887), p. 258. Voir également, *L. Cremona*, Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat. (3) 1 (1876/7), p. 142.

269) Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 424.

270) Les travaux les plus approfondis sur les tétraèdres homologiques sont, entre autres, ceux de *G. Veronese*, Atti R. Accad. Lincei, Transunti (3) 4 (1879/80), p. 132/49; *Th. Reye*, Acta math. 1 (1882/3), p. 97; *J. Vályi*, Archiv Math. Phys. (2) 3 (1886), p. 441; *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 169; 109 (1892),

L'étude des tétraèdres homologiques se généralise par la considération de ce que l'on peut appeler des tétraèdres en *situation hyperboloïdique* (in *hyperboloidischer Lage*), en désignant ainsi deux tétraèdres dont les sommets et les faces se correspondent de façon que les quatre droites joignant les sommets correspondants appartiennent à un même hyperboloïde, de même que les quatre droites d'intersection des faces homologues, „chacune de ces propriétés étant d'ailleurs conséquence de l'autre.* L'existence de ces systèmes de tétraèdres est déjà signalée par *M. Chasles*[271]), lequel constate que deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à une quadrique sont disposés de cette manière. Inversement, si deux tétraèdres sont en situation hyperboloïdique, il existe une quadrique par rapport à laquelle ils sont polaires réciproques[272]).

Plus généralement encore, on peut étudier les couples de tétraèdres dans lesquels les deux systèmes de quatre droites formés, l'un des droites qui joignent les sommets correspondants, l'autre des intersections des faces correspondantes, appartiennent chacun à une même multiplicité linéaire[273]). *J. Vályi*[274]) trouve qu'il existe trois cas dans lesquels deux tétraèdres remplissent cette condition: ou bien les deux tétraèdres sont homologiques, les droites joignant leurs sommets étant alors concourantes et les intersections de leurs faces étant dans un même plan; ou bien, les deux tétraèdres sont en situation hyperboloïdique; ou bien enfin, les deux tétraèdres sont placés de telle façon que les quatre droites de chacun de ces deux systèmes se partagent en deux couples de droites sécantes, le point commun à deux droites sécantes étant dans le plan des deux autres. Il peut en outre arriver que plusieurs de ces dispositions se présentent simultanément avec les mêmes tétraèdres.

F. Schur[275]) a étudié les couples de tétraèdres qui sont en situation

p. 341; *E. Hess,* Math. Ann. 28 (1887), p. 212; *L. Klug,* Archiv Math. Phys. (2) 6 (1888), p. 93.

271) Aperçu hist.¹), (2e éd.) p. 400/3. Pour plus de renseignements bibliographiques, voir Math. Ann. 19 (1882), p. 429.

272) *J. Rosanes,* J. reine angew. Math. 90 (1881), p. 320; *J. Vályi,* Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 220; *P. Muth,* Z. Math. Phys. 38 (1893), p. 314.

273) *G. Kohn* [Sitzgsb. Akad. Wien 107 IIa (1898), p. 777] envisage également des tétraèdres qui se correspondent dans une homographie biaxiale; il dit que ces tétraèdres sont disposés en *perspective gauche (schief perspectivisch).* Deux tétraèdres étant ainsi placés, il en existe un troisième auquel tous deux sont à la fois inscrits et circonscrits.

274) Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 121; Math.-Naturw. Ber. Ungarn 13 (1897), p. 166, 189 [1895]; Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 220.

275) Math. Ann. 20 (1882), p. 270 et suiv.

hyperboloïdique de plusieurs manières différentes et constaté que, suivant les cas, ils peuvent l'être de trois, quatre, cinq, huit ou neuf manières. Il montre en outre que, de même que deux tétraèdres homologiques sont formés de points qui se correspondent deux à deux dans une homographie centrale, deux tétraèdres en situation hyperboloïdique sont formés de points qui se correspondent dans une homographie axiale, mais non pas, en général, dans une homographie biaxiale[276]), cette homographie axiale dépendant elle-même d'une arbitraire[277]).

Parmi les transformations homographiques remarquables, il y a encore lieu de citer, en géométrie plane, les deux suivantes qui ont été rencontrées par *M. Pasch*[278]). Lorsque, dans une transformation homographique, un triangle ABC est circonscrit au triangle $A'B'C'$ qui lui correspond, il existe une quadruple infinité de triangles ABC jouissant de la même propriété, chacun de ces triangles ayant deux sommets qui peuvent être arbitrairement choisis et déterminent le troisième d'une manière unique: on dit alors que la transformation est *triangulairement inscrite (in eingeschriebener Dreieckslage),* et que la transformation inverse, qui fait correspondre le triangle ABC au triangle $A'B'C'$ [n° **23**] est *triangulairement circonscrite* (*in umgeschriebener Dreieckslage*). Une même transformation homographique peut être à la fois triangulairement inscrite et triangulairement circonscrite: les deux quadruples infinités de triangles qui lui correspondent ont alors en commun une double infinité de triangles qui sont simultanément inscrits et circonscrits à leurs homologues, c'est-à-dire se confondent avec leurs homologues: il en résulte, ainsi que nous le verrons plus loin [n° **14**], que toute transformation de cette nature est une transformation périodique de période 3, et réciproquement.

M. Pasch a étendu ces notions aux transformations corrélatives:

276) Math. Ann. 19 (1882), p. 429. Etant donnés deux tétraèdres quelconques, il existe en général deux homographies axiales seulement, par rapport auxquelles ils se correspondent point par point; il y en a une simple infinité s'ils sont en situation hyperboloïdique, une double infinité s'ils sont en homologie proprement dite. Deux tétraèdres homologiques se correspondent, en général, dans une triple infinité de transformations homographiques, parmi lesquelles ne se trouve qu'une homographie centrale, mais aucune homographie biaxiale.

277) *H. Schnell* [Diss. Giessen 1891] détermine les tétraèdres en homologie proprement dite ou en situation hyperboloïdique, que l'on obtient dans la triple infinité de transformations homographiques ayant le même tétraèdre fondamental d'éléments doubles.

278) Math. Ann. 23 (1884), p. 419.

il envisage en particulier deux corrélations R, R′, telles que le produit R · R′ [n° **23**] constitue une transformation homographique triangulairement inscrite ou circonscrite, et dit alors que la corrélation R′ est triangulairement inscrite ou circonscrite par rapport à la corrélation R[279]).

Signalons en dernier lieu une série de travaux concernant soit la disposition remarquable de certains éléments d'une transformation, soit les relations remarquables pouvant exister entre plusieurs transformations homographiques[280]).

13. Figures en involution. Deux figures projectives de rang un étant superposées, à un élément désigné par A ou B' selon qu'on le considère comme appartenant à la première ou à la seconde figure, correspondent deux éléments A' et B en général distincts. Si, quel que soit l'élément choisi (A, B') les éléments A' et B coïncident, les formes projectives sont dites *involutives* et les éléments homologues A et A' sont dits *conjugués* dans une involution. C'est sous cette forme que *M. Chasles*[281]) a présenté la notion d'involution; c'est à lui également qu'est due cette proposition capitale que, dans une figure de rang un, la réciprocité a lieu pour deux éléments homologues quelconques dès qu'elle a lieu pour un couple seulement.

Lorsque trois couples de points

$$A,\ A';\quad B,\ B';\quad C,\ C'$$

appartiennent à deux ponctuelles en involution, ils constituent ce que l'on appelle *six points en involution*, ou encore un système de *trois couples de points conjugués*; on peut les définir par l'une quelconque des deux relations

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB',$$
$$\frac{AB \cdot AB'}{AC \cdot AC'} = \frac{A'B \cdot A'B'}{A'C \cdot A'C'}.$$

279) *J. Rosanes* dit aussi que ces deux corrélations sont conjuguées. *S. Goldschmidt* [Diss. Giessen 1883; Z. Math. Phys. 30 (1885), p. 182] a donné une définition géométrique de ces corrélations.

280) Par exemple *G. Tarry* [C. R. Acad. sc. Paris 94 (1882), p. 941] envisage dans un même plan trois figures deux à deux homographiques, pour lesquelles les triangles de points doubles ont leurs neuf sommets sur une même conique.

F. Krieg von Hochfelden [Sitzgsb. Akad. Wien 97 II^a (1888), p. 806] étudie dans l'espace trois transformations homographiques Γ_1, Γ_2, Γ_3 satisfaisant à la relation $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot \Gamma_3 = 1$ [n° **23**]. Cf. *G. Kohn*, Sitzgsb. Akad. Wien 93 II (1886), p. 314.

281) Géom. sup.[29]), (1^re éd.) p. 121, 167; (2^e éd.) p. 113, 157. Cf. *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 4 (1844), p. 253.

Leur étude a précédé et préparé celle des ponctuelles en involution. C'est *Pappus*[282]) qui en a rencontré un premier exemple dans l'intersection d'un quadrilatère complet avec une transversale quelconque. On en connaissait un autre en envisageant trois points sur une droite et en faisant correspondre à chacun d'eux son conjugué harmonique par rapport aux deux autres[283]).

Ch. J. Brianchon[284]) a donné, en les déduisant du théorème de Ptolémée, l'ensemble des sept relations qui relient ces six points; quatre sont de la première forme que nous venons d'indiquer, trois de la seconde.

C'est *G. Desargues*[285]) qui a fait intervenir le premier ce que l'on appelle le *centre* ou *point central* d'une involution, c'est-à-dire le point O, homologue du point à l'infini, et qui a montré que deux points homologues quelconques A, A' sont reliés par la relation

$$OA \cdot OA' = \text{const.}$$

Enfin, *M. Chasles* a ajouté aux relations précédentes un grand nombre de relations métriques de diverses natures[286]).

L'étude des faisceaux en involution est identique à celle des ponctuelles en involution; pour en former d'une manière simple il suffit d'envisager deux faisceaux homographiques quelconques et, en déplaçant l'un d'entre eux, de faire coïncider les sommets de ces deux faisceaux ainsi que les deux angles droits qui ont pour côtés des rayons homologues [n° **9**] de telle façon que chaque côté de cet angle soit alors perpendiculaire à son homologue.

On dit qu'une involution entre les points d'une ponctuelle ou les rayons d'un faisceau est *hyperbolique* ou *elliptique*, suivant que ses éléments doubles sont réels ou imaginaires: dans le premier cas, deux éléments homologues quelconques sont conjugués harmoniques par rapport aux éléments doubles.

282) *Συναγωγὴ μαθηματική*, livre 7, prop. 130; Pappi Alexandrini collectiones[1]), éd. *F. Hultsch* 2, Berlin 1877, p. 872/3.

283) Cf. *K. G. Chr. von Staudt*, Geom. der Lage[158]), p. 121.

284) *Ch. J. Brianchon*, Lignes du second ordre[13]), p. 11; *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 179/85; Werke, Munich 1897, p. 515/22] en donne une interprétation algébrique très simple.

285) Œuvres[4]), p. 119. Cf. note 2 et *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), éd. 1901, p. 43.

286) Aperçu hist.[1]), p. 308; Géom. sup.[29]), (1^re éd.) p. 127; (2^e éd.) p. 119. Cf. *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 4 (1844), p. 253; *A. Jacobi*, J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 45; *G. Battaglini*, Giorn. mat. (1) 1 (1863), p. 1, 41, 97, 161; *G. Bečka*, Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1878, p. 272; *B. Klein*, Z. Math. Phys. 28 (1883), p. 252.

L'involution elliptique la plus simple est l'*involution circulaire*: c'est celle d'un faisceau de droites dont deux rayons homologues quelconques sont rectangulaires; ses rayons doubles passent par les ombilics du plan du faisceau. *Une involution elliptique, dans une ponctuelle, peut toujours être considérée comme la section par une transversale rectiligne d'une involution circulaire dans un faisceau de rayons.*

L'involution hyperbolique la plus simple est l'*involution symétrique* dans laquelle deux éléments homologues sont disposés symétriquement par rapport aux éléments doubles: *dans le cas d'un faisceau, les rayons doubles sont alors rectangulaires et bissectent l'angle de deux rayons homologues quelconques*; dans le cas de la ponctuelle, l'un des points doubles est à l'infini. Une involution hyperbolique dans une ponctuelle peut donc toujours être projetée suivant une involution symétrique.

De même, étant donnée une involution quelconque dans un faisceau de plans, on peut toujours couper ce dernier par un plan suivant un faisceau de droites, de façon à obtenir dans ce dernier une involution circulaire ou une involution symétrique selon que la première involution est elliptique ou hyperbolique[287]).

Dans le cas particulier où les deux éléments doubles d'une involution se confondent, on dit que l'involution est *parabolique;* mais elle se réduit alors à une involution *dégénérée*[288]) [n° **15**].

Un exemple capital de deux ponctuelles en involution est celui des ponctuelles tracées sur une transversale fixe quelconque par une conique variable d'un faisceau de coniques[289]); en particulier, les points d'intersection d'une transversale avec une conique et les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans cette conique appartiennent à une même involution[290]).

---

287) *H. Schröter,* Oberflächen zweiter Ordnung[170]), p. 19; *W. Fiedler,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 26 (1881), p. 89.

Pour d'autres propositions remarquables sur des figures en involution, voir *E. Dewulf* [Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 383] et *R. Böger* [Diss. Leipzig 1886]; *G. Kohn* [Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 141] constate que si l'on coupe par une transversale les dix faces d'un pentaèdre, on trouve, de cinq manières différentes, six points en involution.

288) Par exemple, si l'on envisage l'involution formée par les points situés sur une même droite et conjugués par rapport à une conique, cette involution dégénère dans l'hypothèse où la droite est tangente à la conique, le point de contact de la tangente étant alors conjugué de tout autre point de la droite.

289) Cette proposition est due à *J. Ch. F. Sturm,* Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 180. C'est sur elle que repose la construction bien connue des points doubles d'une involution à l'aide d'un faisceau de cercles.

290) Ce cas particulier de la proposition due à *J. Ch. F. Sturm* remonte à

La notion d'involution s'étend à l'ensemble des points ou des tangentes d'une conique et, plus généralement, à toutes les figures fondamentales de rang un, aux cônes du second ordre, aux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique par exemple.

Deux ponctuelles en involution sur une conique sont toujours disposées de telle façon que la droite qui joint deux points homologues passe par un point fixe[291]), appelé le *centre de l'involution*; il en résulte que les points doubles de l'involution sont les points de contact des tangentes menées à la conique par ce centre; les tangentes à la conique en deux points homologues sont aussi en correspondance involutive et se coupent sur une droite fixe, appelée *axe de l'involution,* laquelle est nécessairement la polaire du centre de l'involution[292]). *M. Chasles* a employé un procédé analogue pour établir une correspondance involutive entre les génératrices d'un même système d'une quadrique[293]). Un exemple de ponctuelles en involution sur une conique a été donné par *Em. Weyr*: il est constitué par les deux points d'intersection variables de cette conique avec une conique variable d'un faisceau dont deux des points fixes de base sont situés sur la première conique[294]).

Deux involutions distinctes, entre éléments d'une même figure, ont toujours en commun un couple d'éléments homologues. Si l'on projette les deux involutions sur une conique, ce couple est défini par les points d'intersection de la conique avec la droite qui joint les

---

G. Desargues [cf. note 285]. *C'est pour cette raison que la proposition générale de *J. Ch. F. Sturm* est plus connue sous le nom de *théorème de Desargues.**

Sur les rapports de l'involution et de la polarité, voir III 17, **29**.

291) Cf. **Frégier*, Ann. math. pures appl. 6 (1815/6), p. 229, 321;* *F. Seydewitz,* Archiv Math. Phys. (1) 4 (1844), p. 244; *A. Jacobi,* J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 68.

292) Cette correspondance entre points d'une conique peut être généralisée dans la théorie des quadriques de la façon suivante. Si, par un point d'une quadrique, on mène trois droites, deux à deux conjuguées par rapport à un cône du second ordre ayant ce point pour sommet, et que l'on associe les seconds points où ces droites coupent la quadrique, le plan mené par ces trois points ainsi associés passe par un point fixe. Cette propriété était déjà connue de *Frégier*, Ann. math. pures appl. 7 (1816/7), p. 97; une démonstration géométrique en a été donnée, pour la première fois, par *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 180.

293) J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 348. *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge[395]), fasc. 1, p. 55/62] donne quelques propositions concernant cette involution.

294) Sitzgsb. Akad. Wien 58 II (1868), p. 223. *Ce résultat est une application dans un cas très particulier d'une proposition de la géométrie sur une courbe algébrique plane quelconque [cf. III 19].*

centres des deux involutions[295]). Les deux éléments communs ne sont donc imaginaires que si les deux involutions sont hyperboliques et ont des éléments doubles qui se séparent mutuellement. Toutes les constructions géométriques qui se ramènent à la détermination des éléments communs à deux involutions peuvent ainsi être effectuées à l'aide d'un cercle fixe [n° **11**]; telle est par exemple la construction des deux points qui, sur une droite donnée, sont simultanément conjugués harmoniques par rapport à deux couples de points donnés.

A toute correspondance homographique se rattache une involution d'une importance capitale. Soient, dans deux ponctuelles homographiques de même base, A' et A'' les points qui correspondent à un même point quelconque A considéré comme appartenant successivement à chacune des deux ponctuelles; A' et A'' se correspondent d'abord dans deux ponctuelles homographiques nouvelles ayant les mêmes points doubles, M et N, que les deux premières. Puis, si A_1 est le conjugué harmonique de A par rapport à A' et A'', A et A_1 se correspondent alors dans une involution ayant toujours M et N pour points doubles. Ces propositions, dues à *M. Chasles*[296]), ramènent la construction des points doubles de deux ponctuelles homographiques de même base à celle des points doubles de deux ponctuelles en involution [n° **11**][297]).

M. Pasch[298]) a généralisé cette propriété; A, A', A'' étant choisis comme on vient de le dire, il détermine A_1 par la condition que le rapport anharmonique

$$(A', A'', A, A_1)$$

ait une valeur donnée λ; A et A_1 sont encore deux points homologues d'une transformation homographique ayant les mêmes points doubles M et N, et cette transformation laisse invariantes les deux premières ponctuelles.

295) *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 4 (1844), p. 265.

296) Géom. sup.[29]), (1re éd.) p. 186, (2e éd.) p. 177. Cf. *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 120.

297) *Une autre propriété souvent appliquée est la suivante: si (A, A'), (B, B') sont deux couples d'éléments homologues de deux formes projectives superposées (ponctuelles ou faisceaux) dont E et F sont les éléments doubles, les trois couples AB', BA', EF, sont en involution. Pour des propriétés analogues dans l'espace à n dimensions, cf. *M. Stuyvaert*, Nouv. Ann. math. (4) 6 (1906), p. 348/55.*

298) J. reine angew. Math. 91 (1881), p. 349; Math. Ann. 23 (1884), p. 422. Cette proposition s'étend à la transformation homographique d'un plan: on applique trois fois la transformation à un même point P, ce qui donne successivement les couples PQ, QR, RS, puis l'on construit un point P' tel que le système de cinq points $PQRSP'$ soit collinéaire d'un groupe de cinq points donnés. Cf. *C. Segre*, Memorie Accad. Torino (2) 38 (1888), p. 3.

Les involutions tracées sur une même droite peuvent, ainsi que l'a montré *M. Chasles*, être envisagées comme de nouveaux êtres géométriques auxquels s'appliquent encore les méthodes de la correspondance homographique. Si, en effet, on envisage quatre couples de points en involution, et que l'on prenne le conjugué harmonique d'un point P par rapport à chacun de ces couples, on obtient quatre points dont le rapport anharmonique est indépendant du point P, et peut être regardé comme le rapport anharmonique des quatre couples de points considérés. Ceci conduit immédiatement à la notion de correspondance homographique entre deux involutions, et permet une extension des méthodes de génération des figures[299]) [n° **10**]. On arrive ainsi immédiatement à un mode de description des courbes du troisième et du quatrième degré[300]) [cf. III 20].

Envisageons maintenant les transformations homographiques d'un plan. Une telle transformation n'est involutive que dans le cas très particulier où elle est une homologie centrale et où, de plus, chaque couple de points homologues est divisé harmoniquement par le centre et l'axe d'homologie, c'est-à-dire que le rapport anharmonique de l'homologie est égal à -1. Une transformation homographique est involutive dès qu'il y a réciprocité entre deux couples seulement de points homologues, pourvu que ces couples ne soient pas dans une position exceptionnelle.

Dans le cas des transformations homographiques de l'espace, il existe deux cas distincts d'involution. Le premier donne, comme en géométrie plane, l'*homologie centrale involutive* dont l'exemple le plus simple est constitué par la symétrie par rapport à un plan. Le second est celui de *l'homographie involutive gauche* ou *biaxiale*: c'est l'homographie biaxiale, définie par deux droites fixes et un rapport anharmonique constant [n° **12**], pour laquelle ce rapport est égal à -1; cette

299) C. R. Acad. sc. Paris 41 (1855), p. 679, 1097. La correspondance homographique entre deux involutions s'exprime par une relation quadratique par rapport à chacune des deux variables x et y, relation telle que certain déterminant formé avec ses neuf coefficients soit nul. *Cf. *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, Mélanges de géométrie pure, Paris 1856, p. 160, 166.*

300) *H. Schröter* [Math. Ann. 5 (1872), p. 63] a ainsi développé une géométrie synthétique des courbes planes du troisième ordre, fondée sur leur génération à l'aide de deux involutions de faisceaux reliées par une correspondance homographique semi-perspective, en entendant par là une correspondance dans laquelle la droite qui joint les sommets, envisagée comme appartenant successivement aux deux faisceaux, fait partie de deux couples homologues.

En ce qui concerne les figures engendrées à l'aide d'involutions d'ordre supérieur, voir l'article III 4.

transformation est donc complètement définie par ces deux directrices fixes, et deux points homologues sont placés sur une droite qui s'appuie sur ces directrices en des points formant avec eux une division harmonique[301]). L'exemple le plus simple d'une homographie gauche involutive est celui de la symétrie par rapport à une droite. Deux espaces en correspondance homographique ne peuvent pas en général être placés de façon que cette correspondance soit une homographie gauche involutive; mais lorsque le fait est possible, il l'est d'une simple infinité de manières[302]).

La notion d'involution s'étend aux transformations *corrélatives.* Il y a encore involution entre deux figures corrélatives lorsque chaque élément a le même homologue, considéré comme appartenant soit à la première figure, soit à la seconde. C'est *F. Seydewitz* qui semble s'être posé le premier le problème de la recherche des transformations corrélatives involutives[303]). Il trouve d'abord, dans le cas du plan, que les deux coniques rencontrées dans la transformation corrélative générale, la première, lieu des points situés sur leurs droites homologues, la seconde, enveloppe des droites passant par leurs points homologues [n° **11**], se confondent en une seule, laquelle peut au reste n'avoir aucun élément réel. Puis un point A et sa droite homologue a' sont respectivement pôle et polaire l'un de l'autre par rapport à cette conique, de sorte que la transformation corrélative involutive la plus générale est une *transformation par polaires réciproques,* dont cette conique est la conique directrice.

Les mêmes résultats se retrouvent dans les transformations corrélatives de la gerbe; lorsqu'il y a involution, on a une transformation par polaires réciproques par rapport à un cône directeur du second ordre. Spécialement, il existe en général un trièdre trirectangle dont les éléments, faces et arêtes, se correspondent deux à deux[304]).

301) Cette involution a été envisagée pour la première fois par *K. G. Chr. von Staudt,* Geom. der Lage[158]), p. 128. Cf. *C. Stephanos,* Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 431; **Cl. Servais,* Mathesis (1) 10 (1890), p. 132/3; Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 52 (1894/5), mém. n° 3, p. 15.*

G. Kilbinger [Progr. Sarreguemines 1883] a donné des propositions remarquables sur les cercles et faisceaux de cercles se correspondant, dans le plan et dans l'espace, dans une transformation homographique involutive.

302) M[lle] *L. Bortniker,* C. R. Acad. sc. Paris 104 (1887), p. 771; *G. Darboux,* id. p. 774.

303) Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 158. Dans ce mémoire *F. Seydewitz* donne en outre un grand nombre de relations métriques entre les deux figures.

304) Il y a exception dans le cas où le cône directeur est de révolution, et alors il existe une simple infinité de trièdres trirectangles jouissant de cette propriété. Mais il y a plus; il existe un cas où chaque droite de la gerbe est perpendiculaire au plan homologue; le cône directeur est alors un cône isotrope et les deux figures corrélatives sont alors connues sous le nom de *figures supplémentaires.*

Dans l'espace il existe deux classes distinctes de transformations corrélatives involutives. Dans la première, les deux quadriques de la transformation générale, l'une lieu des points situés dans leurs plans homologues, l'autre enveloppe des plans passant par leurs points homologues [n° **11**], se confondent en une seule, et la transformation est une transformation par polaires réciproques dont cette quadrique est la quadrique directrice[305]).

Dans la seconde classe, la transformation est caractérisée par ce fait que tout point A est toujours situé dans son plan homologue α'; ce point A et ce plan α' sont alors respectivement pôle et plan polaire l'un de l'autre par rapport à un système focal (Nullsystem). Deux tétraèdres homologues sont alors à la fois inscrits et circonscrits l'un par rapport à l'autre[306]).

Une transformation corrélative est involutive dès qu'il existe un triangle dans le cas du plan, un trièdre dans le cas de la gerbe, un tétraèdre dans le cas de l'espace, dont les éléments aient pour homologues les éléments opposés.

14. Projectivités cycliques. Soit une transformation homographique P effectuée sur une figure fondamentale. A un élément quelconque A_1 de la figure, la transformation fait correspondre un élément A_2, puis à cet élément A_2 un autre élément A_3, et ainsi de suite. Il peut arriver que la suite de ces éléments

$$A_1 A_2 A_3 \ldots$$

se ferme après n opérations, c'est-à-dire que l'élément, qui dans cette transformation correspond à A_n, se confonde avec le premier élément

305) On appelle *figure autopolaire* une figure qui est sa propre polaire réciproque par rapport à une conique, ou un cône, ou une quadrique. Toute courbe plane autopolaire peut être considérée comme enveloppe de coniques autopolaires [cf. *P. Appell,* Nouv. Ann. math. (3) 13 (1894), p. 206]. Le fait qu'il puisse exister des coniques et des quadriques autopolaires est presque évident: toute conique c ou quadrique F, autopolaire par rapport à un autre conique c' ou quadrique F', lui est bitangente, ou circonscrite le long d'une courbe plane; *réciproquement étant donnée c' ou F', et la corde des contacts ou le plan de la courbe de contact, il existe deux coniques c ou deux quadriques F par rapport auxquelles c' ou F' est autopolaire.* On trouvera plus de détails sur la polarité dans les articles III 17, III 18 et III 22.

306) Il existe d'ailleurs d'autres systèmes de deux tétraèdres à la fois inscrits et circonscrits: cf. *P. Muth,* Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 117; *G. Bauer,* Sitzgsb. Akad. München 27 (1897), p. 359.

A_1[307]), autrement dit enfin que la transformation donne la projectivité suivante:

$$A_1 A_2 A_3 \dots A_n \barwedge A_2 A_3 \dots A_n A_1.$$

Lorsqu'il en est ainsi, quel que soit l'élément initial A_1 pris dans la figure, la projectivité est dite *cyclique* et tout groupe d'éléments tel que

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

est appelé *groupe cyclo-projectif*; l'entier n est l'ordre de cette transformation ou de ce groupe.

Une projectivité cyclique d'ordre n est toujours associée à $n-2$ autres transformations de même nature, qui sont les puissances successives de la première [n° **23**]: si l'on désigne par P cette première transformation, toutes ses puissances sont représentées par les symboles

$$\mathrm{P},\ \mathrm{P}^2,\ \mathrm{P}^3,\ \dots,\ \mathrm{P}^{n-1};$$

les groupes cyclo-projectifs d'éléments que l'on peut former avec chacune d'elles sont les puissances successives du cycle $A_1 A_2 \dots A_n$[308]). La $n^{\text{ième}}$ puissance P^n de la transformation est une *transformation identique*, qui fait correspondre chaque élément à lui-même[309]).

Dans le cas de $n = 2$, la projectivité cyclique n'est autre chose qu'une involution; dans le cas de $n = 3$ et d'une figure fondamentale de première espèce, un groupe cyclique d'éléments est parfois appelé groupe *équianharmonique*[310]).

La proposition fondamentale de l'involution s'étend au cas général d'une projectivité cyclique: si dans une homographie il existe un seul élément, de position générale, qui appartienne à un groupe cyclique

307) C'est *A. Clebsch* [J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 167] qui le premier a établi l'existence de pareils groupes de points. Ensuite, *G. Battaglini* [Giorn. mat. (1) 14 (1876), p. 126] en a fait une étude systématique, dans laquelle il envisage aussi des correspondances qui ne possèdent qu'en partie le caractère cyclique.

308) Sur ces notions, voir l'article I 8.

309) *Th. Reye* [Geom. der Lage, (3ᵉ éd.) 2, Leipzig 1892, p. 96 et suiv.; (4ᵉ éd.) 3, Leipzig 1910, p. 182] a fait une étude approfondie des propriétés des projectivités cycliques. Dans le cas de $n = 4$, on a les trois transformations

$$\mathrm{P},\ \mathrm{P}^2,\ \mathrm{P}^3;$$

et les divers groupes de points qui leur correspondent sont respectivement

$$(A_1 A_2 A_3 A_4),\quad (A_1 A_3)(A_2 A_4),\quad (A_1 A_4 A_3 A_2);$$

la transformation P^2 est donc une involution.

310) Voir, au sujet de cette transformation, et de l'expression „groupe équianharmonique", *H. Schröter*, Math. Ann. 10 (1876), p. 420. „Cette expression ayant été employée déjà dans la théorie du rapport anharmonique, il serait préférable de réserver le nom de *groupe équianharmonique* au groupe formé par trois points et un des points doubles de la projectivité cyclique qu'ils déterminent."

de n éléments, il en est de même de tous les autres éléments, et la projectivité est cyclique d'ordre n.

Dans les figures fondamentales de première espèce, il existe des projectivités cycliques de tous les ordres. *J. Lüroth*[311]) a montré que, pour une valeur donnée, supérieure à deux, de l'ordre n, la projectivité cyclique est complètement déterminée par trois éléments consécutifs d'un même groupe cyclique. Le rapport anharmonique constant formé par les éléments doubles et deux éléments homologues quelconques est égal à une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité; il en résulte que, par une projection convenable, toute projectivité cyclique d'ordre n peut se ramener à une rotation d'un faisceau de droites autour de son sommet, l'angle de rotation étant commensurable avec l'angle droit[312]): cette propriété caractérise complètement la nature de ces homographies.

Dans toute projectivité cyclique d'un plan, il n'existe jamais qu'un seul point double réel U, et une seule droite double réelle u; comme on peut toujours projeter le plan de la figure sur un autre de façon que cette droite u se projette à l'infini, et que les points doubles imaginaires de la transformation, situés sur u, se projettent aux ombilics du plan, il en résulte que, par cette projection, on peut ramener la transformation à une rotation de période n autour de son point double réel. Ce résultat donne le caractère général des projectivités cycliques d'un plan, et montre qu'elles ne sont qu'une simple généralisation projective des rotations d'un plan sur lui-même[313]) [n° **22**]. Il en résulte également que tout groupe cyclo-projectif d'un plan est formé de points tous situés sur une même conique ou, dans certains cas particuliers, sur une même droite[314]).

Comme on l'a déjà dit plus haut [n° **11**], une telle transformation est un cas particulier d'une transformation d'Hermite.

Dans toute projectivité cyclique de l'espace, il existe toujours au

311) Math. Ann. 11 (1877), p. 84. Cf. *S. Kantor*, Sitzgsb. Akad. Wien 82 (1880), p. 34; *A. Ameseder* [Sitzgsb. Akad. Wien 98 IIᵃ (1889), p. 290] a étudié les projectivités cycliques des figures de rang un, en se basant sur cette remarque que, parmi les puissances d'un groupe cyclique quelconque, il y en a toujours une qui correspond à l'ordre naturel des éléments.

312) Cf. *E. Bonsdorff* [Acta Soc. scient. Fennicae 11 (1880), p. 329] qui traite le problème d'après les principes de la théorie des formes.

313) *J. Lüroth*, Math. Ann. 13 (1878), p. 305/19; *H. Reim*, Diss. Breslau 1879. Le cas de $n = 3$ est aussi désigné sous le nom de homographie *trilinéaire*: Selon *H. Schröter* [Oberflächen zweiter Ordnung[170]), p. 402 et suiv.] un triangle et son homologue sont alors triplement homologiques.

314) Cf. *M. Genty*, Bull. Soc. math. France 21 (1893), p. 148.

moins deux droites doubles réelles, g et h, les points de chacune d'elles étant tous des points doubles, ou se transformant entre eux par une projectivité cyclique. *Dans le cas le plus général, ou bien la transformation peut se ramener par une collinéation à une rotation de période n autour d'une droite, ou bien elle consiste en une homographie biaxiale [n° **11**] ayant pour directrices deux droites imaginaires conjuguées et définie par un rapport anharmonique égal à une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité;* tous les points d'un même groupe cyclo-projectif sont alors placés soit sur une conique, soit sur une même droite[315]).

Ces deux cas sont les seuls qui puissent se présenter dans l'hypothèse $n = 3$.

Dans l'hypothèse $n = 4$, en dehors de ces deux cas il ne peut s'en présenter qu'un troisième, dans lequel il existe deux droites doubles, p et q, *réelles ou imaginaires*, dont les points se transforment par une involution. Dans ce cas, dont l'existence a été établie par *H. Schröter*[316]), tout groupe cyclo-projectif de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 forme alors un quadrilatère gauche dont chacune des diagonales A_1A_3, A_2A_4 rencontre les deux directrices p, q; *les sommets opposés de ce quadrilatère, A_1 et A_3, A_2 et A_4, se correspondent dans une homographie involutive gauche dont p et q sont les directrices; enfin, les deux points d'intersection des deux diagonales A_1A_3, A_2A_4 avec l'une quelconque des directrices p, q sont en involution.*

H. Schröter a enfin démontré que deux tétraèdres quelconques formés par les points de deux groupes cyclo-projectifs sont de quatre manières différentes en situation hyperboloïdique[317]).

A. Pampuch[318]) a complété cette étude en discutant la nature des deux directrices p, q, et a trouvé trois cas distincts. Ou bien ces deux directrices sont réelles, les involutions tracées sur chacune d'elles étant ou toutes deux elliptiques, ou l'une elliptique, l'autre hyperbolique: *elles jouent alors le rôle des deux droites réelles g et h dont nous avons signalé l'existence dans le cas général de n quelconque.* Ou bien enfin, ces deux droites sont imaginaires; mais il existe alors deux

315) Ce cas comprend donc, en particulier, celui d'une rotation périodique autour d'un point fixe. Le mouvement le plus général étant un mouvement hélicoïdal, une projectivité cyclique ne peut lui être ramenée.

316) Math. Ann. 20 (1882), p. 231.

317) Deux de ces tétraèdres peuvent être également à la fois inscrits et circonscrits l'un à l'autre; cf. *P. Muth*, Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 117. A l'un de ces tétraèdres, on peut en outre en associer d'autres qui lui sont homologiques de une, deux ou quatre manières, ou qui sont avec lui en situation hyperboloïdique de cinq ou neuf manières: cf. *K. Uhrig*, Diss. Giessen 1891.

318) Diss. Strasbourg 1886.

autres droites doubles réelles, les droites g et h, dont les points se correspondent, sur chacune d'elles, dans une projectivité cyclique d'ordre 4.

A. Pampuch a en outre déterminé toutes les quadriques ainsi que toutes les courbes gauches du troisième et du quatrième ordre qui restent invariantes dans la transformation.

L'hypothèse $n = 5$ a été étudiée par *H. Küppers*[319]) et *A. Ameseder*[320]). Ici encore, un seul cas se présente, en dehors des deux cas généraux signalés plus haut. Les seules quadriques que laisse invariantes la transformation sont alors celles qui passent par quatre droites fixes, imaginaires, ces droites constituant, avec les droites réelles g et h, le tétraèdre fondamental. Tout groupe cyclo-projectif est formé des points communs à deux cubiques placées sur l'une de ces quadriques, admettant comme bisécante l'une la droite g, l'autre la droite h; tout groupe cyclo-projectif de plans est formé des plans osculateurs communs aux mêmes cubiques.

Cette homographie se ramène également, par une projectivité convenable, à un type simple dans lequel l'une des droites g et h est rejetée à l'infini dans un plan perpendiculaire à l'autre, les quadriques invariantes étant des hyperboloïdes de révolution autour de cette autre.

Lorsque n est supérieur à 5, le seul résultat général à signaler consiste en ce que tout groupe cyclo-projectif est formé de points qui sont, ou tous placés sur une même droite, ou sur un même plan, ou répartis entre deux plans distincts, ou enfin placés sur un même hyperboloïde.

S. Kantor[321]) a généralisé la notion de projectivité cyclique en montrant que, dans certains cas, tous les points $A_1, A_2, A_3 \ldots$, obtenus par des applications répétées de la transformation, peuvent être tous placés sur une courbe algébrique d'ordre m, ou sur une surface de même nature, suivant qu'il s'agit de la tranformation homographique du plan ou de l'espace. Ici encore s'applique cette proposition générale que, si ce fait se présente avec un seul point, il se présente avec tous.

15. Homographies et corrélations évanouissantes. On dit qu'une transformation homographique ou corrélative est évanouissante ou dégénérée lorsque tout élément de l'une des figures ne correspond plus

319) Diss. Munster en/W. 1890, éd. Bonn 1890.

320) Sitzgsb. Akad. Wien 98 II^a (1889), p. 588.

321) Id. 82 II (1880), p. 34. Cf. n° **24**.

nécessairement à un élément et un seul de l'autre. Si, par exemple, on envisage les figures homographiques planes obtenues à l'aide d'une perspective, la transformation sera évanouissante lorsque le centre de la perspective sera placé dans le plan de l'une au moins des deux figures[322]). Nous n'envisagerons dans ce qui suit que des dégénérescences de cette nature. C'est principalement *T. A. Hirst* qui a fait l'étude de ces transformations particulières, et qui en a compris le rôle important.

D'abord, une projectivité entre deux ponctuelles est évanouissante lorsque tous les points de chaque ponctuelle correspondent à un seul et même point de l'autre[323]).

Dans l'étude des figures fondamentales de rang deux ou trois, il est plus clair, suivant l'exemple de *T. A. Hirst*[324]), de parler de transformations corrélatives. En géométrie plane, on rencontre trois cas de dégénérescences, appelés *corrélations singulières*[325]); les deux premiers de ces cas se correspondent l'un à l'autre par voie de dualité, et le troisième se correspond à lui-même.

Le premier cas, connu sous le nom de *dégénérescence centrale*, est caractérisé par les propriétés suivantes. D'abord, dans chacun des deux plans qui se correspondent dans la transformation, il existe un point remarquable, P pour le premier, P' pour le second, auquel correspond dans l'autre plan toute droite de position quelconque; puis les deux faisceaux de droites de sommets P et P' sont projectifs, de telle sorte que, si d et d' sont deux droites homologues quelconques de ces deux faisceaux, la droite d correspond dans la transformation corrélative à tout point de d', la droite d' à tout point de d. Cette corrélation est donc complètement définie par le couple de points P et P' et la relation homographique entre les faisceaux de droites ayant ces points pour sommets.

Le second cas, connu sous le nom de *dégénérescence axiale*, est, comme nous l'avons déjà dit, le corrélatif du précédent.

Enfin, le troisième cas, connu sous le nom de *dégénérescence centrale-axiale*, peut être considéré comme une combinaison des deux

322) Voir la note 323 et *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie, (2e éd.) Leipzig 1875, p. 68, 80 et 704; (4e éd.) 1, Leipzig 1904.

323) En ce qui concerne l'involution dégénérée, voir n° **13** et note 288.

324) Proc. London math. Soc. (1) 5 (1873/4), p. 41; (1) 6 (1874/5), p. 7; (1) 8 (1876/7), p. 262; Ann. mat. pura appl. (2) 6 (1873/5), p. 260. Cf. *R. Sturm*, Math. Ann. 12 (1877), p. 261, 270.

325) On rencontre un exemple de ces dégénérescences en faisant dégénérer la conique directrice d'une transformation par polaires réciproques; le même exemple se présente dans l'espace.

précédents. Il se présente lorsque chaque plan comprend un point singulier, P ou P', et une droite singulière, h ou h', passant par ce point; l'homologue d'une droite de l'un des deux plans, du premier par exemple, est suivant les cas, ou bien le point singulier P' du second plan, si cette droite ne passe pas par le point singulier P, ou bien un point arbitraire de la droite singulière h' du second plan, si elle passe par le point singulier P sans se confondre avec la droite h, ou enfin un point arbitraire du second plan, si elle se confond avec h; de même, un point de ce premier plan a pour homologue ou la droite singulière h' du second plan, s'il n'est pas situé sur la droite singulière h, ou toutes les droites passant par le point singulier P', s'il est situé sur la droite singulière h sans se confondre avec le point singulier P, ou enfin toutes les droites du second plan, s'il se confond avec P.

Cette dégénérescence centrale-axiale peut être envisagée soit comme un cas particulier d'une dégénérescence centrale, dans laquelle la projectivité entre les deux faisceaux de droites de sommets P et P' est évanouissante, soit comme un cas particulier d'une dégénérescence axiale dans laquelle la projectivité entre les ponctuelles de bases h et h' est dégénérée.

On dit, pour ces raisons, que la dégénérescence centrale et la dégénérescence axiale sont des dégénérescences de *premier ordre*, et que la dégénérescence centrale-axiale est du *second ordre*[326]).

Dans les corrélations entre deux espaces, on rencontre trois ordres de dégénérescences[327]).

Le nombre de paramètres dont dépend une collinéation, qui est de 15 dans le cas général, s'abaisse dans le cas d'une dégénérescence,

326) La discussion des dégénérescences d'une collinéation ne présente pas identiquement les mêmes particularités, suivant le sens, géométrique ou analytique, dans lequel on la développe. Une énumération complète de ces dégénérescences, basée sur la théorie des formes bilinéaires, a été faite, pour un espace de dimension quelconque, par *G. Loria* [Giorn. mat. (1) 22 (1884), p. 1] et par *C. Segre* [Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat. (3) 19 (1884), p. 127]. Les dégénérescences qu'ils obtiennent par ce procédé peuvent aussi être obtenues par une méthode géométrique; il suffit, en opérant par exemple dans le plan, de définir la corrélation la plus générale par quatre points de l'une des figures et les quatre droites homologues de l'autre, et de supposer que certains côtés ou sommets des deux quadrilatères ainsi formés viennent à se confondre: cf. *Th. Reye*, Geometrie der Lage, (4e éd.) 2, Stuttgard (Leipzig) 1907, p. 19, 35.

327) *T. A. Hirst*, Proc. London math. Soc. (1) 6 (1874/5), p. 7; (1) 21 (1889/90), p. 92. Cf. *G. del Prete* [Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 30 (1897), p. 400] qui donne une énumération méthodique des dégénérescences dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

et se réduit respectivement à 14, 13 ou 12, suivant qu'il s'agit d'une dégénérescence du premier, du second ou du troisième ordre.

Les dégénérescences du *premier ordre* appartiennent à trois types distincts: les premiers, la dégénérescence *centrale* et la dégénérescence *planaire*, sont corrélatifs l'un de l'autre; le troisième, la dégénérescence *axiale*, est à lui-même son corrélatif.

Dans une *dégénérescence centrale*, chacun des deux espaces Σ ou Σ' comprend un point singulier, P ou P', auquel correspondent tous les plans de l'autre; de plus, les gerbes ayant pour sommets ces deux points sont également en relation corrélative, de sorte que tout plan de l'une d'elles a pour homologue tous les points de la droite qui lui correspond dans l'autre gerbe.

La *dégénérescence planaire* est, avons-nous dit, la corrélative de la précédente.

Dans la *dégénérescence axiale*, chacun des deux espaces, Σ ou Σ', comprend une droite singulière, d ou d', qui est l'homologue de toutes les droites de l'autre espace. De plus, ces droites sont les supports de deux ponctuelles projectives et les axes de deux faisceaux projectifs de plans, de sorte que, si A et A' sont deux points homologues de ces ponctuelles, le point A correspond, dans la corrélation entre Σ et Σ', à tout plan passant par A', et que de même, si π, π' sont deux plans homologues quelconques de ces deux faisceaux, le plan π correspond dans la corrélation à tout point du plan π'.

Les dégénérescences du *second ordre* appartiennent également à trois types distincts. On peut les former, soit en combinant deux types de dégénérescences du premier ordre, soit en partant d'une dégénérescence du premier ordre et en supposant que la correspondance homographique ou corrélative qui intervient dans sa définition dégénère à son tour. *T. A. Hirst* désigne ces trois types de dégénérescences sous les noms de *centrale-axiale, planaire-axiale* et *centrale-planaire*: les deux premiers sont encore corrélatifs l'un de l'autre, le troisième est à lui-même son corrélatif.

Dans un dégénérescence *centrale-axiale*, chacun des espaces, Σ ou Σ', comprend un point singulier, P ou P', et une droite singulière, d ou d', issue de ce point; ces droites d et d' sont les axes de deux faisceaux homographiques de plans; et alors, tout plan de l'un de ces espaces, de Σ' par exemple, a pour homologue, suivant les cas, le point P s'il ne passe pas par P', tous les points de d s'il passe par P' sans passer par d', ou enfin tous les points du plan homologue dans le faisceau d'axe d s'il appartient au faisceau d'axe d'.

La dégénérescence *planaire-axiale* est la corrélative de la précédente.

Dans la dégénérescence *centrale-planaire*, chacun des espaces comprend un point singulier, P ou P', et un plan singulier, π ou π', issu de ce point; le faisceau de rayons de sommet P et de plan π est projectif au faisceau de sommet P' et de plan π', de sorte que, si a et a' sont deux rayons homologues de ces deux faisceaux, tout plan de Σ passant par a correspond dans la corrélation à tous les points de a', et de même pour tout plan de Σ' passant par a'.

Il n'existe enfin qu'un seul type de dégénérescence du *troisième ordre*, appelé dégénérescence *centrale-planaire-axiale*, et qui est à lui-même son corrélatif. Dans cette dégénérescence, chacun des espaces Σ ou Σ' comprend un point singulier P ou P', une droite singulière d ou d' issue de ce point, et un plan singulier π ou π' passant par cette droite; alors tout plan de l'un de ces espaces, de Σ' par exemple, a pour homologue, suivant les cas, le point P si ce plan ne passe pas par P', tous les points de d s'il passe par P' sans passer par d', tous les points de π s'il passe par d' sans se confondre avec π', ou enfin tous les points de l'espace Σ s'il se confond avec π'.

Le rôle important joué par les corrélations évanouissantes, dans la théorie générale des homographies et des corrélations, est analogue à celui que jouent les coniques et quadriques dégénérées[328]) dans le problème des caractéristiques [cf. III 4]. Ce rôle se manifeste surtout dans les problèmes de géométrie énumérative, problèmes qui consistent dans la recherche du nombre de corrélations satisfaisant à certaines conditions données.

Cette question a été complètement résolue par *T. A. Hirst* dans le cas des collinéations entre deux plans[329]). Les conditions que l'on envisage dans ce cas appartiennent à quatre types distincts: ou bien l'on se donne un couple d'éléments homologues formés soit par un point A du premier plan et une droite a' du second, soit par une droite b du premier et un point B' du second; ou bien on se donne un couple de deux points conjugués, ou enfin un couple de deux droites conjuguées. Les deux premières conditions sont des conditions *doubles*, les deux autres sont *simples*. Si l'on désigne respectivement par k, l, m, n les nombres de ces divers couples d'éléments, *T. A. Hirst*

328) Cette analogie se présente encore dans d'autres circonstances. Si l'on transforme une conique ou quadrique par une corrélation évanouissante, on obtient une conique ou quadrique dégénérée. Il en est de même si l'on déplace deux plans (ou deux espaces), reliés par une corrélation évanouissante, de façon à les rendre polaires réciproques.

329) Proc. London math. Soc. (1) 5 (1873/4), p. 41; voir également, Ann. mat. pura appl. (2) 6 (1873/5), p. 260.

appelle *signature* de cet ensemble de conditions le groupe (k, l, m, n) de ces quatre nombres; le nombre total de conditions est alors

$$\sigma = 2k + 2l + m + n,$$

et la corrélation est déterminée lorsque σ est égal à 8.

Lorsque σ est égal à 7, il existe une famille simplement infinie de corrélations remplissant les conditions données et, dans cette famille, certaines corrélations évanouissantes dont *T. A. Hirst* a déterminé le nombre et la nature pour chaque signature possible. Soit E l'enveloppe, dans l'un des plans, des droites qui, dans toutes les corrélations de la famille, sont les homologues d'un même point de l'autre plan; soit, dans les mêmes conditions, c le lieu des points homologues d'une même droite. La classe μ de l'enveloppe E et le degré ν du lieu c sont reliés aux entiers π et λ, qui représentent respectivement les nombres de dégénérescences centrales et axiales de la famille, par les relations connues de la théorie des caractéristiques:

$$\mu = 2\nu - \pi, \quad \nu = 2\mu - \lambda.$$

Cela posé, *T. A. Hirst* remarque que les entiers π et λ désignent aussi le nombre des corrélations qui, appartenant à la famille qui vient d'être étudiée, admettent en outre un couple donné de points conjugués ou de droites conjuguées, autrement dit le nombre de corrélations ayant respectivement pour signatures

$$(k, l, m+1, n) \quad \text{et} \quad (k, l, m, n+1).$$

On obtient ainsi, pour toutes les signatures possibles, le nombre de corrélations remplissant huit conditions. En particulier, lorsque l'un des nombres m ou n de la signature est nul, le nombre de corrélations est égal à *un* et la corrélation peut être linéairement construite. Exception a lieu pour la signature

$$(2, 2, 0, 0)$$

pour laquelle il n'existe aucune corrélation. Certains de ces problèmes avaient d'ailleurs été déjà traités par *H. Schröter*[330]).

Plus tard, *T. A. Hirst* a repris le problème par une autre méthode[331]). Il envisage la famille doublement infinie de corrélations remplissant *six* conditions, famille qui comprend, d'une part, deux familles simplement infinies formées l'une de dégénérescences centrales, l'autre de dégénérescences axiales, et, d'autre part, un nombre fini de dégénérescences du second ordre. Chacune de ces familles de dégénérescences du premier

330) J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 215.

331) Proc. London math. Soc. (1) 8 (1876/7), p. 262.

ordre possède deux nombres caractéristiques:

$$\lambda_p, \quad \lambda_l;$$

λ_p désigne le nombre des dégénérescences axiales qui admettent en outre un couple donné de points conjugués, autrement dit aussi la classe de l'enveloppe des droites de l'un des plans qui sont homologues d'un même point de l'autre plan par rapport à toutes ces dégénérescences axiales;

λ_l désigne de même le nombre des dégénérescences axiales qui admettent en outre un couple de droites conjuguées, autrement dit l'ordre de la courbe lieu des points homologues d'une même droite par rapport à toutes ces dégénérescences axiales; φ_p et φ_l désignent les nombres analogues de dégénérescences centrales.

Ces nombres sont liés par les relations

$$2\lambda_l = \lambda_p + \delta, \quad 2\varphi_p = \varphi_l + \delta,$$

où δ désigne le nombre de dégénérescences du second ordre remplissant les six conditions envisagées.

On constate immédiatement que chacun des nombres λ_p et λ_l n'est autre chose qu'un nombre désigné plus haut par λ, pour certaine signature remplissant *sept* conditions. De là résulte que, lorsque δ est connu, toutes les valeurs que peut prendre λ peuvent se déduire d'un certain nombre d'entre elles: effectivement, il suffit de les connaître avec six signatures pour lesquelles leur détermination est particulièrement simple. Il en est de même pour les nombres φ.

Le problème analogue concernant les corrélations dans l'espace a été traité par *T. A. Hirst* et *P. Visalli*. Les conditions qu'il faut alors envisager se répartissent, suivant leur ordre de multiplicité, en quatre groupes. Les conditions *simples* sont constituées par un couple de deux éléments conjugués de même nom, soit deux points, soit deux droites, soit deux plans; une droite conjuguée d'un point ou d'un plan donne une condition *double*; un système d'un point et d'un plan homologues, une condition *triple*; enfin, un système de deux droites homologues, une condition *quadruple*. Il faut quinze conditions simples pour déterminer une corrélation, c'est-à-dire pour qu'il n'y en ait qu'un nombre fini.

Les recherches se développent alors suivant une voie parallèle à celle suivie pour les corrélations planes. Toute famille simplement infinie de corrélations, assujetties à quatorze conditions simples, comprend d'abord un nombre fini de dégénérescences du premier ordre; on désigne respectivement par

$$\lambda, \varphi \text{ et } \psi$$

le nombre de dégénérescences centrales, planaires et axiales; puis, cette famille possède trois nombres caractéristiques,

$$\mu, \nu, \varrho$$

qui sont respectivement la classe de la développable enveloppée par le plan homologue d'un point fixe donné, l'ordre de la courbe gauche décrite par le point homologue d'un plan fixe, le degré de la surface réglée engendrée par la droite homologue d'une autre droite fixe: ces trois nombres sont aussi ceux des corrélations de la famille qui satisfont en outre à une condition simple de plus, condition représentée par un couple de deux éléments conjugués de même nom, soit deux points, soit deux plans, soit deux droites. Ces trois nombres μ, ν, ϱ sont alors reliés aux nombres λ, φ, ψ par les relations connues de la théorie des caractéristiques dans les quadriques [cf. III 4].

Des résultats analogues se présentent avec les familles doublement ou triplement infinies de corrélations, assujetties à treize ou à douze conditions simples, et leurs dégénérescences du second ou du troisième ordre.

T. A. Hirst a procédé par une marche analogue à celle qu'il avait suivie pour développer sa seconde solution du problème plan[332]). Envisageant d'abord les familles de corrélations assujetties à douze conditions, familles dont il détermine le nombre de dégénérescences du troisième ordre, il traite ensuite successivement les cas de treize, quatorze et quinze conditions, mais en se limitant essentiellement aux cas de conditions simples seulement[333]).

P. Visalli[334]) a au contraire préféré la méthode directe. A l'aide d'un procédé original de réduction, il détermine directement les dégénérescences caractéristiques des familles assujetties à treize ou à quatorze conditions, et en déduit les nombres caractéristiques de chaque problème. Poussant ses investigations plus loin que *T. A. Hirst*, il envisage non seulement le cas des conditions simples, mais encore celui des conditions triples, et résout complètement cette partie du problème.

16. Le problème de la projectivité. C'est dans les travaux de *K. G. Chr. von Staudt*[335]) que se présente pour la première fois un problème qui, généralisé, conduit à ce que l'on appelle le *problème de la projectivité.* Il s'agit, étant donnés deux plans π et π', et dans chacun d'eux quatre ou cinq points se correspondant deux à deux, A et A', B et B', ..., de trouver respectivement dans ces deux plans deux points P et P' tels que l'on ait la projectivité

$$P(AB\ldots) \barwedge P'(A'B'\ldots).$$

Avec quatre couples de points, chaque point P peut être associé à une infinité de points P'; le lieu de ces points P' est une conique dans le cas général, une droite dans certains cas particuliers: cette conique est celle qui passe par les quatre points A', B', C', D' et sur laquelle ces quatre points ont un rapport anharmonique égal à celui du faisceau $P(ABCD)$. Avec cinq couples de points, chaque point P de position générale peut être associé à un point P' et un seul. Tous ces résultats ont été établis par *K. G. Chr. von Staudt*[336]).

Avec six ou sept couples de points donnés, A et A', B et B' ..., il y a lieu de chercher, dans les deux plans π, π', quels sont les systèmes de points *associés* P et P' tels que les droites qui les joignent respectivement aux points donnés A et A', B et B', ... appartiennent à deux faisceaux homographiques. *M. Chasles* a résolu la question et établi que, dans le cas de six points, le lieu des points P et P' est, dans chacun des plans π et π', une courbe du troisième ordre, puis que, dans le cas de sept points, il n'y a plus que trois systèmes de points associés P et P'[337]).

R. Sturm[338]) est entré dans une discussion plus approfondie de ce problème de la projectivité en envisageant en outre les points et éléments pour lesquels la solution générale dégénère. Ainsi, dans le

---

332) Proc. London math. Soc. (1) 6 (1874/5), p. 7; (1) 21 (1889/90), p. 92. Le premier travail ne contient qu'une préparation sommaire de la question. Les travaux de *R. Sturm* [Math. Ann. 12 (1877), p. 254] se rattachent étroitement à ce problème; mais l'exposition de *T. A. Hirst* ne repose en rien sur ces travaux.

333) *T. A. Hirst* indique seulement comment on pourrait ramener le cas de conditions multiples à celui de conditions simples.

334) Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat. (4) 3 (1886), p. 597.

335) Geom. der Lage[158]), p. 147.

336) **M. Chasles* [Nouv. Ann. math. (1) 14 (1855), p. 211] propose, à titre d'exercice, le problème corrélatif: étant donnés cinq points en ligne droite d'une part, cinq droites quelconques d'autre part, couper celles-ci par une transversale de façon que les cinq points d'intersection correspondent homographiquement aux cinq points donnés.* *N. G. Poudra* [id. p. 311] donne immédiatement une solution de la question.

La solution du problème de Staudt, dans le cas de cinq points, a été simplifiée par *H. Schröter*, Z. Math. Phys. 35 (1890), p. 59.

337) Nouv. Ann. math. (1) 14 (1855), p. 50. Comme dans le cas signalé dans la note précédente, *M. Chasles* pose encore en problème le cas des sept points, et obtient deux solutions, l'une de *N. G. Poudra* [Nouv. Ann. math. (1) 15 (1856), p. 58] l'autre de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, id. (1) 17 (1858), p. 399. Voir aussi *L. Cremona* [id. (1) 20 (1861), p. 453] ainsi que *K. Küpper* [Rozpravy české Akad. 6 (1897) II, mém. nº 21] et *Ed. Weyr* [id. 8 (1899), mém. nº 24].

338) Math. Ann. 1 (1869), p. 533.

cas de quatre points, lorsque le point P se confond avec l'un des quatre points $A, B, C, D,$ on peut lui associer un point *quelconque* P' du plan π'. De même, dans le cas de cinq points, si P vient se confondre avec A, on peut lui associer, dans le plan π', tous les points P' appartenant à une même conique; cette conique est celle qui passe par les points B', C', D', E' et sur laquelle ces quatre points ont un rapport anharmonique égal à celui du faisceau $A(BCDE)$. En opérant de même avec chacun des cinq points $A, B, C, D, E,$ on obtient ainsi, dans le plan π', cinq coniques qui ont en commun un même point Q'. On définit de la même façon un point Q dans le plan π; et il arrive que le rôle de ce point Q, dans le plan π', est analogue à celui des points A, B, C, D, E en ce sens qu'il peut être associé à son tour à une infinité de points, ceux de la conique passant par les cinq points A', B', C', D', E'; il en est de même pour le point Q'. *R. Sturm*[339]) dit que ces deux points Q et Q' sont *reliés* aux cinq couples de points donnés, et démontre plus tard que, si on les joint à deux points associés quelconques P et P', les deux droites obtenues sont rayons homologues des deux faisceaux homographiques, de sommets P et P', définis par la projectivité[340]).

H. Müller[341]) a étendu à l'espace le problème de la projectivité de la manière suivante. Étant donnés n couples de points A_i, A_i', il s'agit de trouver un système de deux droites d, d' telles que les plans définis respectivement par ces droites et les points d'un même couple soient tous des plans homologues de deux faisceaux homographiques de plans[342]). *H. Müller* a résolu ce problème dans tous les cas où n est au plus égal à sept. La solution repose sur ce fait que les droites

339) *R. Sturm* étudie également dans son mémoire la correspondance établie entre les deux plans, et complètement définie par les cinq couples de points donnés, dans laquelle deux points associés P et P' se correspondent. Cette relation fait correspondre une droite de position générale de chacun des deux plans à une courbe du cinquième ordre qui admet pour points doubles les cinq points donnés et le sixième point, Q ou Q', qui leur est relié; une courbe du troisième ordre, qui passe par ces six points fixes, correspond à une autre courbe du troisième ordre jouissant de la même propriété. *R. Sturm* fait application de ces résultats aux quadriques.

340) Math. Ann. 22 (1883), p. 571.

341) Math. Ann. 1 (1869), p. 413.

342) La question corrélative, pour le cas de $n = 7$: „étant donnés sept points alignés et sept plans quelconques, couper ceux-ci par une transversale de façon que les sept points d'intersection soient en correspondance homographique avec les sept points donnés", avait été déjà proposée en problème par *M. Chasles* [Nouv. Ann. math. (1) 14 (1855), p. 50] et résolue par *N. G. Poudra.*

qui, avec quatre points donnés $A, B, C, D,$ déterminent quatre plans ayant un rapport anharmonique constant, forment un complexe tétraédral Γ.

Cette remarque donne immédiatement la solution dans le cas de $n = 4$[343]): chaque droite d de l'espace Σ peut être associée à toutes les droites d' de l'espace Σ' qui appartiennent à un même complexe tétraédral Γ'; de plus, ainsi que le remarque *R. Sturm*[344]), chaque droite d' de ce complexe Γ' est associée à son tour à toutes les droites de l'espace Σ qui appartiennent à un même complexe Γ et ce second complexe comprend la droite d; les deux complexes Γ et Γ' sont ainsi *associés*, chaque droite d de l'un étant associée à chaque droite de l'autre.

De là, on passe aux cas de $n = 5$ et de $n = 6$; chaque droite d de l'espace Σ est alors associée à toutes les droites d' de l'espace Σ' qui appartiennent, dans le cas $n = 5$, à une même congruence, celle des bisécantes d'une cubique gauche, et, dans le cas $n = 6$, à un même système de génératrices rectilignes d'une quadrique. Dans les deux espaces Σ et Σ', on obtient ainsi soit des cubiques gauches associées, soit des systèmes réglés associés. Enfin, dans le cas de $n = 7$, une droite d n'est en général associée qu'à une seule autre droite d'.

R. Sturm a également approfondi ce problème, dans le cas de l'espace, en s'attachant à l'étude des éléments pour lesquels la solution générale dégénère ou présente une forme remarquable. C'est ce qui arrive lorsque la droite d passe par un ou par deux des points donnés A_i, auxquels cas l'ordre de la multiplicité des droites d' qui lui sont associées s'élève de une ou de deux unités. *R. Sturm*[345]) passe en revue tous ces cas d'exception et détermine, dans chacun d'eux, la configuration géométrique formée par les droites d' associées à une même droite d. Par exemple, dans le cas de $n = 6$, si la droite d passe par un ou par deux des points A_i, toutes les droites d' qui lui sont associées sont celles qui lui sont également associées par rapport au système des cinq ou des quatre autres points, et qui forment donc, suivant les cas, la congruence des bisécantes d'une cubique gauche ou un complexe tétraédral Γ'.

343) La solution de ce problème particulier a été donnée pour la première fois, sous sa forme corrélative, par *J. Steiner* [cf. Syst. Entw.[108]), p. 299; Werke 1, Berlin 1881, p. 442; la remarque (id. p. 527) ajoutée par *H. Schröter*, est erronée].

344) Math. Ann. 6 (1873), p. 515.

345) Math. Ann. 6 (1873), p. 515. *R. Sturm* étudie également, dans ce travail, la correspondance, en général biunivoque, établie entre les droites d et d' des deux espaces Σ et Σ', dans le cas où l'on donne sept couples de points A_i, A_i'.

Des circonstances remarquables se présentent également pour des droites qui rencontrent l'une des droites $A_i A_k$ joignant deux des points donnés, ainsi que pour les configurations géométriques déterminées, en tout ou en partie, par ces points donnés. Ainsi, dans le cas de $n = 6$, les six points A_i définissent une cubique gauche, et toute bisécante de cette cubique est associée aux rayons d'un système réglé qui reste le même quelle que soit la bisécante choisie. De même, dans le cas de $n = 7$, les génératrices de même système d'une quadrique passant par les sept points donnés A_i sont toutes associées à la même droite d'. Ces éléments jouent un rôle capital dans la disposition des figures qui sont associées dans les espaces Σ et Σ'.

R. Sturm a étendu le problème aux cas où n est égal ou supérieur à 8[346]; il y a lieu alors de chercher dans chacun des espaces Σ et Σ' quelles sont les droites qui ont des droites associées. Avec $n = 8$, ces droites forment dans chaque espace un complexe du quatrième ordre; avec $n = 9$, elles forment une congruence du sixième ordre et de dixième classe; avec $n = 10$, elles forment une surface réglée du vingtième ordre; enfin, avec $n = 11$, il n'existe plus que vingt couples de droites associées. *R. Sturm* a complété ses recherches en étudiant complètement la correspondance qui lie les droites associées de ces diverses multiplicités, la disposition de celles-ci par rapport aux couples de points donnés et enfin les figures remarquables auxquelles elles donnent naissance.

Ces divers points traités, *R. Sturm* a généralisé le problème de la projectivité en l'étendant aux figures fondamentales de rang deux. Le premier problème qu'il se pose est le suivant:

Étant donnés, dans deux espaces Σ et Σ', n couples de points A_i, A_i', chercher un système de deux points S et S' tels que les droites $S(A_i)$ et $S'(A_i')$ soient des rayons homologues de deux gerbes, de sommets S et S', en correspondance homographique, puis étudier la correspondance entre les deux points ainsi associés S et S'[347].

La solution, dans le cas de $n = 5$, repose d'une part sur ce fait que l'on peut établir entre les espaces Σ et Σ' une correspondance homographique dans laquelle les cinq points A_i sont respectivement les homologues des cinq points A_i' et, d'autre part, sur les résultats

346) Math. Ann. 6 (1873), p. 534 et suiv.

347) Math. Ann. 10 (1876), p. 117. Dans ce problème, comme dans le précédent, certains résultats exceptionnels concernent les figures définies par les points A_i et A_i'; et ces résultats caractérisent les singularités de la correspondance entre les points associés S et S'.

obtenus dans le premier problème de la projectivité dans l'espace. On trouve ainsi que tout point S est associé à tous les points d'une cubique gauche c', laquelle, dans la correspondance homographique entre les espaces Σ et Σ', est l'homologue de la cubique gauche c passant par S et les cinq points A_i, de sorte que ces deux cubiques c et c' sont associées l'une à l'autre, chaque point de l'une étant associé à chaque point de l'autre. Dans le cas de $n = 6$, le lieu des points qui ont des points associés est, dans chaque espace, une quadrique. Enfin, dans le cas de $n = 7$, il n'existe plus que quatre couples de points associés S et S'.

R. Sturm a ensuite donné à ce problème une extension qui semble atteindre le plus haut degré de généralité possible dans cet ordre d'idées[348]. Il se pose la question suivante:

Étant donnés k points A_i et l droites b_i dans le premier espace Σ, k droites a_i' et l points B_i' dans le second espace Σ', puis m couples de points C_i, C_i' et n couples de droites d_i, d_i', peut-on trouver deux points *associés* S, S' qui soient les sommets de deux gerbes, en correspondance corrélative, de telle façon que, dans cette correspondance, les k droites $S(A_i)$ soient respectivement les homologues des k plans $S'(a_i')$, les l plans $S(b_i)$ les homologues des l droites $S'(B_i')$, puis que les m couples de droites $S(C_i)$ et $S'(C_i')$ soient formés de droites conjuguées, c'est-à-dire que chacune soit dans le plan homologue de l'autre, et enfin que les n couples de plans $S(d_i)$ et $S'(d_i')$ soient formés de plans conjugués, c'est-à-dire que chacun contienne la droite homologue de l'autre. L'ensemble des quatre nombres

$$k,\ l,\ m,\ n$$

s'appelle la *signature* du problème, et ce problème n'a de sens que sous les conditions

$$8 \leqq 2k + 2l + m + n \leqq 14.$$

R. Sturm traite complètement tous les cas possibles. Dans le cas limite, où le nombre

$$\sigma = 2k + 2l + m + n$$

est égal à 8, on peut en général associer deux points quelconques S et S' des espaces Σ et Σ'. Dans les cas suivants, où σ est égal à l'un des nombres 9, 10 et 11, on peut, en général, associer respectivement à un point quelconque tous les points d'une surface, tous les points d'une courbe, enfin un nombre fini de points. Enfin, dans les

348) Math. Ann. 12 (1877), p. 254.

derniers cas, où σ est égal à l'un des nombres 12, 13, 14, le point S, ou S', ne peut plus être choisi arbitrairement et doit être placé en un point arbitraire d'une surface, ou d'une courbe, ou enfin ne peut occuper qu'un nombre limité de positions.

Dans la solution de tous ces problèmes *R. Sturm* emploie les méthodes qui ont servi à *T. A. Hirst* dans l'étude des questions voisines dont il a été parlé au nº **15**. Il fait usage, comme lui, des nombres caractéristiques et des nombres de dégénérescences qui correspondent à chaque signature, ainsi que des relations de ces nombres entre eux. Les premiers représentent encore le nombre des collinéations qui sont déterminées quand on ajoute aux premières conditions soit un système de deux points, soit un système de deux plans; et ces nombres sont égaux aux degrés des lieux géométriques cherchés.

Par exemple, la signature

$$(k,\ l,\ m,\ n)$$

a, dans le cas de $\sigma = 8$, deux nombres caractéristiques; ces deux nombres sont respectivement égaux au degré de la surface, lieu des points S' qui avec les signatures

$$(k,\ l,\ m+1,\ n) \quad \text{et} \quad (k,\ l,\ m,\ n+1)$$

sont associés à un point quelconque S.

On peut aussi déterminer, par un procédé analogue, l'ordre de multiplicité des éléments singuliers de ces divers lieux géométriques[349]).

Les mêmes méthodes ont encore permis à *R. Sturm* de renouveler plus tard le premier problème de la projectivité dans l'espace en lui donnant une forme plus générale. Au lieu, en effet, de se donner seulement k couples de points A_i, A_i'; on peut leur ajouter l couples de plans α_i, α_i' et chercher alors deux droites associées d, d' qui soient simultanément les axes de deux faisceaux homographiques de plans admettant les plans $d(A_i)$ et $d'(A_i)$ comme plans homologues, et les bases de deux divisions homographiques admettant les points $d(\alpha_i)$ et $d'(\alpha_i')$ comme points homologues. Ce problème n'a de sens que sous les conditions

$$7 \leq k + l \leq 14,$$

et a encore été résolu, dans tous les cas, par *R. Sturm*[350]), d'après les méthodes de *T. A. Hirst.*

349) Cf. *S. Kantor*, Denkschr. Akad. Wien 46 II (1883), p. 83; *P. Visalli*, Atti R. Accad. Lincei, *Memorie mat.* (4) 3 (1886), p. 597.

350) Math. Ann. 15 (1879), p. 407.

Les principes fondamentaux.

17. La géométrie projective établie, avec Staudt, sur des bases indépendantes de la géométrie métrique[351]). *K. G. Chr. von Staudt* s'est proposé de développer toutes les théories de la géométrie projective[352]) sans recourir en rien aux notions métriques d'angles et de distances ni, par conséquent, à l'idée capitale de rapport anharmonique[353]). Il a donné de ce problème une solution qui pouvait être regardée comme irréprochable à son époque, où les axiomes fondamentaux de la géométrie n'avaient pas encore été, comme aujourd'hui, soumis à une discussion approfondie, et qui, malgré quelques lacunes, n'en donne pas moins les points essentiels d'une solution rigoureuse.

Dans sa théorie, *K. G. Chr. von Staudt* ne fait intervenir que des axiomes concernant uniquement la position ou l'ordre des éléments fondamentaux, points et droites, soit que ces axiomes soient explicitement énoncés, soit qu'ils interviennent d'une façon sous-entendue. En n'appliquant que les propositions les plus simples sur les combinaisons des figures fondamentales de l'espace, intersections de droites ou de plans, droites menées par deux points, il commence par établir la propriété que possèdent les diagonales d'un quadrilatère complet de se partager harmoniquement; „pour cela il définit une division har-

351) Nous n'envisagerons ici, comme d'ailleurs dans tout cet article, que la géométrie de l'espace euclidien. Cependant, les diverses démonstrations que nous mentionnons de la proposition fondamentale de *K. G. Chr. von Staudt* ne font intervenir que des éléments géométriques appartenant aussi bien à l'espace non euclidien qu'à l'espace euclidien: c'est un point que *F. Klein*[355]) a bien mis en évidence dans sa discussion de la démonstration de *K. G. Chr. von Staudt.*

En ce qui concerne les divers éléments et les hypothèses fondamentales qui interviennent soit, en général, dans toute la géométrie projective, soit plus particulièrement, dans la proposition fondamentale seulement, on trouvera dans l'article III 1, nºˢ **24** à **28**, une discussion plus approfondie et de leur nature, et des rôles qu'ils jouent les uns par rapport aux autres. Le chapitre actuel est donc ici développé à un point de vue purement *historique*, et n'a d'autre but que de donner un exposé aussi complet que possible des idées de *K. G. Chr. von Staudt*, de la critique de sa démonstration par *F. Klein*, et des travaux qui s'y rattachent immédiatement.

352) Geom. der Lage[155]), voir surtout p. 30/51. On trouvera dans *H. Pfaff*, Neuere Geometrie, Erlangen 1867, une exposition des idées et des développements de *K. G. Chr. von Staudt.* Voir également, *E. Neumayr*, Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck 9 (1878/9), p. 144.

353) Au sujet des origines de ce problème, se reporter à la note 42. Aujourd'hui, après les travaux de *D. Hilbert* [Grundlagen der Geometrie, (2ᵉ éd.) Leipzig 1903, p. 2 et suiv.], on appelle postulats d'appartenance [III 1, 9] (Axiome der Verknüpfung) et postulats de l'ordre (Axiome der Anordnung) les principes fondamentaux invoqués par *K. G. Chr. von Staudt.*

monique comme un ensemble de quatre points A, B, C, D tels que A et C soient deux sommets opposés d'un quadrilatère complet dont deux diagonales passent par les deux autres points B et D, et sa proposition consiste à établir que cette propriété est indépendante du quadrilatère choisi.* Ceci posé, les mêmes considérations l'amènent à établir que la division harmonique comprend deux couples de points distincts, les deux points d'un couple séparant les deux points de l'autre, puis que cette division harmonique se conserve par projection, autrement dit qu'elle a le caractère d'un *invariant projectif*[354]), enfin qu'il y a réciprocité entre les deux points d'un même couple, ainsi qu'entre les deux couples de points.

K. G. Chr. von Staudt donne alors sa définition fondamentale de la projectivité en disant que deux séries linéaires d'éléments sont en relation projective lorsque ces éléments se correspondent deux à deux *d'une manière univoque*, de telle façon que *à quatre éléments d'une série formant une division harmonique correspondent dans l'autre série quatre éléments qui, pris dans le même ordre, forment aussi une division harmonique.*

Pour justifier cette définition, il y a lieu de démontrer que la relation projective est complètement déterminée par trois couples d'éléments homologues, autrement dit, que si les deux séries d'éléments sont prises sur une même droite, il ne peut y avoir plus de deux points de l'une des séries qui coïncident avec leurs homologues, en d'autres termes encore, que si trois éléments de l'une des séries coïncident avec leurs homologues, il en sera de même de tout autre élément. C'est ce théorème qui constitue la *proposition fondamentale* de la géométrie projective.

Pour le démontrer, *K. G. Chr. von Staudt* constate d'abord que *si les deux ponctuelles ont en commun tous les points d'un segment de droite AB, il en sera de même de leurs conjugués harmoniques par rapport à A et B et la proposition est alors établie.* Il reste donc à la démontrer dans l'hypothèse où il n'existe aucun segment de droite dont tous les points soient communs aux deux ponctuelles. Dans ce cas, l'application répétée de la construction du quatrième point harmonique à trois points donnés permet, en partant des points communs aux deux ponctuelles, de construire une infinité d'autres points communs. Cela étant, s'il n'existait aucun segment formé de points communs, la succession de ces points communs formerait une suite discontinue; on pourrait en envisager deux consécutifs, A et B, entre lesquels il

354) Dans le langage moderne, le fait d'être „placé entre" constitue à lui seul un invariant projectif.

n'en existerait donc pas d'autre; mais en dehors de ces deux points il en existe au moins un troisième C, et le conjugué harmonique de C par rapport à A et B serait nécessairement un nouveau point commun placé entre A et B; d'où une contradiction.

F. Klein, dans ses travaux sur la géométrie non-euclidienne[355]), fut amené à discuter cette démonstration et constata d'abord qu'elle contient une lacune grave, car elle exige pour être valable que la notion de *point limite* s'applique à la géométrie projective. Sans elle, il serait possible, en effet, que la suite de points obtenus par application répétée de la construction du quatrième harmonique, tout en étant illimitée, puisse néanmoins ne pas pénétrer dans certains segments de droite[356]). Pour écarter cette objection, *F. Klein* propose d'admettre le postulat suivant: *si, sur une droite, il existe une suite illimitée de points qui ne pénètrent pas dans un segment de cette droite, il existe un point bien déterminé, que l'on peut appeler *point limite*, vers lequel tend cette suite illimitée.* En d'autres termes, l'*axiome de continuité*, admis pour la géométrie ordinaire, doit l'être également pour les figures fondamentales de la géométrie projective.

Acceptant cet axiome, *J. Lüroth* et *H. G. Zeuthen*[356a]) démontrèrent immédiatement, et de la même manière, que la construction répétée du quatrième harmonique donne une suite de points pénétrant dans tout segment de la droite. Leur démonstration repose sur ce fait que, si A et B, A_1 et B_1 sont deux couples de points conjugués harmoniques par rapport à un même troisième, ces deux couples ne chevauchent pas l'un sur l'autre, puis que si A_1 parcourt une suite de points ayant comme point limite A, B_1 parcourt une autre suite ayant comme point limite B[357]).

*Ce premier point étant ainsi éclairé, *F. Klein* rattache la pro-

355) Math. Ann. 6 (1873), p. 139; 7 (1874), p. 531/3.

356) Dans l'état actuel de nos connaissances sur les ensembles, on peut dire que l'erreur fondamentale de *K. G. Chr. von Staudt* consiste en ce qu'il parle, sans plus amples explications, de points „qui se succèdent" sur une droite et entre lesquels ne se place aucun des points qu'il construit. On sait en effet qu'il peut exister des ensembles de points, qu'ils soient denses autour de chacun de leurs éléments ou qu'ils ne le soient autour d'aucun, dans lesquels il n'existe pas de points qui se succèdent. Il en est tout autrement lorsqu'on transforme un ensemble de points, à l'aide du postulat de *F. Klein*, en un ensemble *fermé* [I 7, 13].

356a) Leur démonstration est communiquée par *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 535.

357) Ceci peut être regardé comme une conséquence immédiate de ce que l'ordre se conserve dans une projection: voir, par exemple, à ce sujet, *M. Pasch*, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, p. 90.

position fondamentale de *K. G. Chr. von Staudt* à la question voisine suivante: la correspondance projective entre deux séries linéaires étant définie par trois couples d'éléments homologues, peut-on, par des constructions successives de divisions harmoniques, construire l'homologue d'un point quelconque de l'une des séries? Dans le cas d'une série de points par exemple il est manifeste que ceci n'est pas possible pour tout point du support et ne l'est que pour ceux qui, en géométrie métrique, seraient définis dans un certain système de coordonnées par des nombres rationnels. Confondant alors les deux questions, *F. Klein* crut d'abord que la correspondance projective n'était définie que pour l'ensemble des points ainsi atteints, et que, pour l'étendre à tous les points de chaque série,* il est nécessaire de faire une nouvelle hypothèse, celle de la *continuité de la relation projective*, laquelle consiste à dire que si, dans l'une des séries, un élément est point limite d'une suite de points appartenant à des divisions harmoniques, cet élément doit être considéré comme faisant partie de la série[358]).* Cette hypothèse étant admise, comme il résulte de la proposition de *J. Lüroth* et *H. G. Zeuthen* que si deux séries prises sur une même droite ont trois points doubles l'ensemble de tous leurs points doubles est partout dense, tout autre point de la droite sera point limite d'une suite de points doubles, et la proposition fondamentale, au sens accepté par *F. Klein*, est ainsi établie.

F. Klein remarque d'ailleurs que cette seconde hypothèse, sur la continuité de la relation projective, peut être remplacée par une autre, *l'hypothèse de l'ordre*, laquelle exprime que si des points de l'une des séries se succèdent dans un ordre déterminé, il en est de même des points homologues de l'autre suite. En effet, de cette hypothèse on déduit facilement, en la combinant avec la proposition de *J. Lüroth* et *H. G. Zeuthen*, celle de la continuité de la relation projective.

Mais ensuite *G. Darboux* est allé plus loin[359]) et a fait faire à cette discussion un progrès capital en montrant que cette seconde hypothèse, même sous sa seconde forme, est inutile *si on se limite essentiellement à la démonstration de la proposition fondamentale de *K. G. Chr. von Staudt*, c'est-à-dire si l'on envisage a priori une relation

358) C'est dans ces termes que *F. Klein* [Math. Ann. 7 (1874), p. 537] énonce son second postulat. D'ailleurs, *K. G. Chr. von Staudt* [Geom. der Lage[153]), p. 55] a fait lui-même intervenir la continuité dans l'étude de la correspondance projective; elle apparaît dans ses travaux comme une conséquence de la proposition fondamentale, deux séries linéaires en relation projective pouvant être reliées l'une à l'autre par une succession de perspectives.

359) Math. Ann. 17 (1880), p. 55. Cf. *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 252.

projective entre deux séries linéaires d'éléments, tout élément de l'une des séries ayant, par hypothèse, un élément homologue et un seul dans l'autre série, et si l'on ne se préoccupe pas, avec *F. Klein*, de la façon dont on peut construire cet élément homologue.* En d'autres termes, la seconde hypothèse de *F. Klein*, celle de l'ordre, est elle-même une conséquence de la définition d'une relation projective.

La démonstration de *G. Darboux* repose sur cette remarque que la condition nécessaire et suffisante pour que, étant donnés sur une même droite deux segments AA' et BB', il existe un couple de points qui les divise tous deux harmoniquement, est que ces deux segments ne chevauchent pas l'un sur l'autre: que la condition soit nécessaire, c'est ce qu'avait déjà remarqué *K. G. Chr. von Staudt*, ainsi que nous l'avons dit plus haut, dans son étude fondamentale de la division harmonique; qu'elle soit suffisante, c'est ce qu'établit *G. Darboux*, et c'est en cela que consiste l'originalité de sa démonstration. Assimilant à une courbe fermée une droite dont on regarde le point à l'infini comme ne jouant pas de rôle distinct de tout autre point, il fait observer que, si deux points décrivent une telle courbe dans le même sens, le premier précédant d'abord le second pour le suivre ensuite, il existe une position au moins dans laquelle ils coïncident. Si donc deux segments AA', BB' appartenant à une même droite ne chevauchent pas, on aura deux points mobiles remplissant cette condition en envisageant les deux conjugués harmoniques d'un même point P, l'un Q par rapport à A et A', l'autre R par rapport à B et B', lorsque P se déplace de A en A' en parcourant le segment extérieur à BB'; il existe ainsi un point S pour lequel Q et R coïncident, et qui est bien conjugué harmonique d'un même point P, à la fois par rapport à A et A', à B et B'.

De cette remarque résulte d'abord que *l'ordre* est non plus une hypothèse, mais seulement une conséquence de la définition de *K. G. Chr. von Staudt*. Car si à quatre points A, B, C, D, rangés en ordre, correspondaient quatre points A', B', C', D' qui ne le soient plus, on pourrait, avec les premiers, former deux segments ne chevauchant pas, et par conséquent conjugués harmoniques par rapport à un même couple de points, tandis que leurs homologues formeraient deux segments chevauchant l'un sur l'autre et ne pouvant donc pas être partagés harmoniquement par un même couple de points. Enfin, la démonstration de la proposition fondamentale s'achève ainsi qu'il suit: soient, sur une même droite, deux séries linéaires en relation projective, ayant trois points doubles A, B, C; s'il existait deux points homologues distincts X et X', l'un des segments d'extrémités X et

X' contiendrait deux des points doubles au moins, soit A et B; les segments XA, BX' seraient extérieurs et divisés harmoniquement tous deux par deux points M et N, et leurs homologues seraient les segments $X'A$, BX qui chevauchent alors qu'ils devraient être divisés harmoniquement par les homologues de M et N, ce qui est contradictoire[360]).

On peut aussi établir la proposition fondamentale de diverses autres manières, et toujours sans faire intervenir la géométrie métrique. D'abord, on peut adopter comme définition d'une relation projective celle de *L. Cremona*, qui consiste à envisager une pareille relation comme une succession de perspectives [n° 8]. C'est la marche suivie par *J. Thomae*[361]). Cette méthode nécessite encore le recours à l'axiome de continuité. Puis la conservation de l'ordre dans la correspondance devient une conséquence immédiate de la définition. La démonstration de la proposition fondamentale s'achève alors d'une manière simple, lorsqu'on se propose seulement, comme *K. G. Chr. von Staudt* et *G. Darboux*, d'établir l'existence de la correspondance, et non pas, comme *F. Klein*, d'atteindre un point quelconque par un mode de construction déterminé. Ici encore intervient cette remarque fondamentale de *G. Darboux* que deux mobiles parcourant une droite se rencontrent nécessairement lorsque l'un deux dépasse l'autre.

Dans une autre méthode, on peut édifier les diverses théories de la géométrie projective en débutant par l'étude des transformations homographiques d'un plan et non par celles de la droite[362]). Dans ce cas, il y a lieu d'établir comme proposition fondamentale que, si les points d'un même plan sont reliés par une correspondance homographique, tout point est à lui-même son homologue dès qu'il en est ainsi pour quatre points du plan. On y arrive par la construction des *réseaux de Möbius*, qui constitue l'extension au plan de la construction répétée sur une droite du quatrième harmonique; mais il est toujours nécessaire d'invoquer un axiome de continuité en faisant intervenir la notion de point limite. Ce procédé a été suivi par *K. Zindler*[363]). S'il

360) *F. Enriques* [Lezioni di geometria proiettiva, (1re éd.) Bologne 1898, p. 90; (3e éd.) Bologne 1909; *trad. allemande de *H. Fleischer*, Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig 1903, p. 84*] donne une exposition complète de la démonstration de la proposition fondamentale, établie, ainsi que nous venons de le dire, par *F. Klein*, *H. Lüroth*, *H. G. Zeuthen* et *G. Darboux*.

361) Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage, Halle 1873, p. 12; Math. Ann. 18 (1881), p. 253.

362) C'est la marche suivie par *G. Battaglini* [Giorn. mat. (1) 12 (1874), p. 300] lequel ne se sert d'ailleurs que des réseaux de Möbius. Voir aussi, *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 254.

ne diffère pas essentiellement de celui qui est suivi dans l'étude des séries linéaires, il a au moins l'avantage théorique de substituer la notion naturelle de quadrilatère complet à celle, qui l'est moins, de relation harmonique.

Un autre procédé a été employé par *C. Le Paige* et *F. Deruyts*[364]). Il repose sur la considération de la correspondance involutive. On définit d'abord ce que l'on entend par trois couples de points en involution sur une droite, lesquels sont obtenus par l'intersection des trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet avec une transversale quelconque. Puis on dit que deux séries de points sur une même droite sont en correspondance involutive lorsque trois couples quelconques de points homologues sont toujours en involution. On démontre alors que la correspondance involutive est définie par deux couples de points, qu'en partant de ceux-ci on peut atteindre tout autre point de la droite, puis que deux involutions distinctes ont au plus un couple commun, enfin que l'involution peut se projeter.

On définit ensuite deux séries projectives superposées en faisant correspondre deux points M et M' qui sont les homologues d'un même troisième dans deux involutions; il en résulte que deux séries projectives superposées ont au plus deux points doubles ou que, si elles en ont trois, elles sont identiques, puis que ces deux séries peuvent toujours être définies par trois couples de points homologues, mais non par quatre.

Enfin, dans cette théorie, on dit que deux séries linéaires distinctes sont en correspondance projective lorsque, par un nombre fini de projections et de sections, on peut les ramener à deux séries projectives superposées.

Dans cette méthode, la division harmonique apparaît comme un système particulier de trois couples en involution dans lequel deux de ces couples ont leurs éléments confondus. Il en résulte que, dans une correspondance involutive d'abord, puis dans une correspondance projective quelconque, une division harmonique correspond à une division harmonique[365]).

363) Sitzgsb. Akad. Wien 98 IIa (1889), p. 499. Voir aussi *C. Le Paige*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 15 (1888), mém. n° 5.

364) Bull. Acad. Belgique (3) 15 (1888), p. 335.

365) Il y a lieu de signaler divers essais de démonstration nouvelle de la proposition fondamentale. L'un est de *B. Klein*, Sitzgsb. Ges. zur Beförderung Naturw. Marburg 1887, p. 37; id. 1888, p. 1; il repose sur la considération de faisceaux et réseaux de projectivités, et tente d'établir que, dans l'ensemble des correspondances projectives, trois couples de points suffisent pour définir l'une d'entre elles.

L'exemple du problème traité par *K. G. Chr. von Staudt* pour la géométrie projective a conduit *M. Pasch*[366]) à résoudre la même question pour la géométrie ordinaire. C'est lui qui a déterminé le premier, d'une manière systématique et complète, quelles sont, parmi les propriétés fondamentales de l'étendue, celles qui sont nécessaires et suffisantes pour en déduire sans aucune omission toutes les propositions de la géométrie[367]); il les a classées, en distinguant celles qui ont un caractère *empirique* de celles qui doivent être considérées comme des *axiomes.* A ce titre, *M. Pasch* doit être regardé comme le véritable fondateur des recherches modernes sur les principes et les axiomes de la géométrie [cf. III 1, **10**].

En particulier, *M. Pasch* arrive à s'affranchir de l'axiome des parallèles (axiome d'Euclide) en opérant seulement à l'intérieur d'un domaine fini qu'il considère comme donné expérimentalement, et en étendant à un domaine inaccessible (idéal), extérieur au précédent, les notions et définitions fondamentales, *un point idéal, par exemple, étant défini par une droite et un plan n'ayant pas de point d'intersection accessible. Cette idée de domaine inaccessible devait être ensuite développée davantage, en ce qui concerne plus particulièrement la géométrie projective, par *F. Schur*[368]), lequel est ainsi arrivé à montrer que, en se limitant à une région limitée de l'espace, on peut donner à la géométrie projective tout le degré de généralité qu'elle possède dans la géométrie de *K. G. Chr. von Staudt*, grâce à l'emploi des éléments à l'infini.* Notons que *M. Pasch* fait intervenir la notion de congruence dans la démonstration de la proposition fondamentale[369]). Signalons enfin une conception nouvelle qui consiste à regarder simplement la proposition fondamentale comme un des postulats de la géométrie.

18. L'importance fondamentale des théorèmes de disposition. On peut faire reposer la géométrie projective sur d'autres bases que

Un second essai, dû à *H. G. Zeuthen* [C. R. Acad. sc. Paris 125 (1897), p. 638, 858; 126 (1898), p. 213] ne réussit que si l'on admet comme postulat cette propriété d'une surface réglée „d'être coupée par un plan γ mené par une génératrice g suivant une courbe résidue rencontrant g en un point M variable avec γ et tangente en ce point M à la droite du plan γ qui s'appuie sur deux génératrices infiniment voisines de g".

366) Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882.

367) *M. Pieri* [Atti Accad. Torino 31 (1895/6), p. 387] signale une omission minime, que corrige *M. Pasch*, Math. Ann. 48 (1897), p. 111.

368) Math. Ann. 39 (1891), p. 113. Cf. *V. Reyes y Prosper*, id. 29 (1887), p. 154; *M. Pasch*, id. 30 (1887), p. 127.

369) Cf. Math. Ann. 30 (1887), p. 101, 120, 127. D'ailleurs, la démonstration nécessite également le recours à l'axiome dit d'Archimède. Cf. III 1, **16**.

celles adoptées par *K. G. Chr. von Staudt*, et prendre comme propositions fondamentales certains théorèmes de disposition ou d'alignement. C'est une conception qui a été exprimée pour la première fois par *H. Wiener*[370]), et les propositions dont il s'agit sont, la première, le théorème de Desargues sur les triangles homologiques dans un plan, la seconde le cas particulier du théorème de Pascal[371]) appliqué à une conique réduite à deux droites et à un hexagone ayant trois sommets sur chacune de ces droites.

L'importance fondamentale de ces deux propositions n'avait pas échappé aux géomètres et avait été signalée à plusieurs reprises dans des recherches concernant les problèmes de la géométrie projective[372]); *Ch. J. Brianchon*[373]) avait même été amené à dire de ces deux théorèmes qu'ils sont „la base de cette partie de la géodésie qui concerne les alignements", et à montrer qu'ils suffisent pour arriver à la solution de tous les problèmes du second ordre. Mais c'est *H. Wiener* qui a su établir leur rôle et leur signification. Sa conception consiste à regarder le domaine de la géométrie projective plane comme constitué par un ensemble d'éléments fondamentaux, répartis en deux systèmes différents (points et droites), et d'opérations fondamentales (intersection

370) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 1 (1890/1), p. 45; 3 (1892/3), p. 70.

371) Ce cas particulier du théorème de Pascal était déjà connu de *Pappus*, qui en fait l'énoncé de son $13^{\text{ième}}$ lemme du $7^{\text{ième}}$ livre des porismes d'*Euclide*. Cf. Pappi Alexandrini collectio [1]), éd. *F. Hultsch* 2, Berlin 1877, p. 887.

J. Steiner envisage la configuration qui apparaît dans ce théorème comme formée par un cycle de trois triangles dont chacun est inscrit dans celui qui le précède et circonscrit au suivant.

Il rattache ainsi la proposition à la suivante: si un triangle est circonscrit à un autre, il existe une infinité de triangles circonscrits au premier et inscrits dans le second. Il envisage aussi les six hexagones de Pascal que l'on peut former avec six points distribués par groupes de trois sur deux droites données et dit que les droites de Pascal correspondantes se répartissent en deux groupes de trois droites concourantes: il énonce cette propriété comme sujet d'exercices [Ann. math. pures appl. 19 (1829), p. 128] et *J. Plücker* [J. reine angew. Math. 10 (1833), p. 222] donne une démonstration de cette proposition *et de la proposition corrélative.* Le cas particulier de ce théorème où la droite de Pascal est rejetée à l'infini a une importance particulière; *C. Rädell* [Archiv Math. Phys. (1) 1 (1841), p. 181] en fait un emploi systématique.

372) Voir par exemple, *J. Steiner*, Synth. Geom.[178]) 1, (1^{re} éd.) p. 26, 89, où l'on trouve deux figures qui représentent les éléments fondamentaux de la théorie, l'une pour le cas de la conique réduite à deux droites, l'autre pour celui d'une conique quelconque.

373) J. Éc. polyt. (1) cah. 10 (1810), p. 13. Signalons ce fait curieux que *Ch. J. Brianchon* envisage déjà le cas où la droite de Pascal est à l'infini, et le déduit de la théorie des figures semblables.

de deux droites, droite menée par deux points), les uns et les autres étant définis d'une manière purement abstraite.

Dans ce domaine, un théorème de disposition (ou d'alignement) est une proposition qui établit que trois points sont en ligne droite, ou que trois droites sont concourantes. L'ensemble des propriétés et opérations de la géométrie projective est alors celui qui se déduit des éléments fondamentaux par application des théorèmes de disposition. Or, en restant à l'intérieur de ce domaine, il n'est pas possible de démontrer les deux théorèmes capitaux dont nous parlons, ni de déduire l'un de l'autre. La question se pose donc, question posée et résolue par l'affirmative par *H. Wiener*[374]), de rechercher si l'on peut édifier toute la géométrie projective sur ces deux propositions admises comme principes. Dans ces conditions, l'axiome de continuité et par suite la proposition fondamentale de *K. G. Chr. von Staudt* deviennent inutiles; mais bien entendu, les autres axiomes de position et d'ordre relatifs aux éléments fondamentaux restent indispensables.

Le problème développé par *H. Wiener* a provoqué ensuite d'importantes recherches et discussions relatives à la place qu'il convient d'assigner, dans l'édifice de la géométrie, à ces deux théorèmes de disposition, et à la nature des axiomes auxquels il faut recourir pour les démontrer. En ce qui concerne le premier, *G. Desargues* avait déjà constaté[374a]) que la propriété des triangles homologiques, dans le cas où ils sont placés dans des plans différents, est une conséquence immédiate des notions de point, droite et plan[375]). Pour *J. V. Poncelet*[376]), la voie la plus naturelle qui conduit à ce théorème, dans le plan, est de le déduire par projection de la propriété plus générale des triangles homologiques de l'espace; mais il reste encore à démontrer, ce qui est d'ailleurs facile[377]), que deux triangles homologiques dans le plan peuvent toujours être regardés comme projections de deux triangles de même nature placés dans des plans différents. Au reste, c'est *F. Klein*[378]) qui a fait constater l'impossibilité d'une démonstration du théorème de Desargues, lorsqu'on invoque seulement les axiomes projectifs du plan.

Quant au théorème de Pascal, *A. Schoenflies*[379]) a montré que, contrairement à ce qui se passe pour le théorème de Desargues, il n'est même pas possible de le déduire, par voie de projection, d'une propriété quelconque de la géométrie de l'espace.

Cette question de la possibilité de la démonstration des deux théorèmes de Desargues et de Pascal reçoit naturellement une autre réponse dès que l'on admet l'axiome de congruence, empruntant ainsi à la géométrie métrique une notion étrangère au domaine de la géométrie projective. La démonstration du théorème de Desargues devient alors immédiate en choisissant pour axe d'homologie la droite de l'infini. Quant au théorème de Pascal, sa démonstration devient possible; et on en possède deux, l'une de *F. Schur*[380]), l'autre de *D. Hilbert*[381]).

374) Le mémoire de *H. Wiener* se contente de développements superficiels.

374a) Le théorème de *G. Desargues* où cette proposition est énoncée a été publié en 1648 par *A. Bosse* à la suite de sa réimpression de la Perspective de *G. Desargues* [Œuvres, éd. *N. G. Poudra* 1, Paris 1864, p. 413/5] (Note de *G. Eneström*).*

375) **G. Desargues*[374a]) a indiqué expressément que le théorème subsiste quand les triangles sont dans un même plan, mais il semble avoir envisagé ce cas comme un cas-limite dans lequel une démonstration est inutile. *E. Kötter* [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5[2] (1896), éd. Leipzig 1901, p. 8] dit que *G. Desargues* a déduit ce cas du cas général par la méthode des projections parallèles; mais il convient d'ajouter que *A. Bosse* a aussi réuni dans une même proposition deux autres théorèmes de *G. Desargues* et que l'emploi de la méthode des projections parallèles se rapporte à l'un de ces théorèmes. *M. Chasles* [Aperçu hist.[1]), p. 82] avance que *G. Desargues* a démontré ce cas à l'aide du théorème des transversales de *Ménélas*; mais si l'extrait donné par *N. G. Poudra*[374a]) est complet, cette assertion est inexacte (Note de *G. Eneström*).*

Le théorème de *G. Desargues* semble avoir été presque oublié jusqu'à ce que *F. J. Servois* l'ait retrouvé à nouveau [Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique, Metz an XII (1804), p. 23].

376) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 89; (2e éd.) 1, p. 86.

377) *F. Enriques*, par exemple, en donne une démonstration dans ses Lezioni di geom. proiettiva[360]), (1re éd.) p. 50; *trad. *H. Fleischer*, p. 42.*

378) Math. Ann. 6 (1873), p. 135; **F. Klein* ajoute: „la géométrie de Staudt n'est valable dans le plan que parce que ce plan et les droites qu'il contient sont des éléments de l'espace."*

379) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 1 (1890/1), éd. 1892, p. 12; Schriften phys. ökon. Ges. Königsberg 44 (1903), Sitzgsb. p. 4. Il y a lieu naturellement de faire exception pour le cas où, dans l'espace, on envisagerait une disposition particulière de points formant une configuration équivalente à celle du théorème de Pascal.

380) Math. Ann. 51 (1899), p. 401. *F. Schur* a recours à un hyperboloïde de révolution dont l'existence est une conséquence de l'axiome de congruence, et il applique le théorème de Pascal *à un hexagone dont les côtés pairs sont placés sur les génératrices d'un même système de cette surface, les côtés impairs sur les génératrices de l'autre système*, théorème déjà démontré, dans ce cas particulier, par *G. P. Dandelin* [Ann. math. pures appl. 15 (1824/5), p. 387; Correspondance math. phys. (de *A. Quetelet*) 2 (1826), p. 10]. Ce même théorème, dans le cas plus général d'un hyperboloïde quelconque, avait été déjà démontré également par *F. J. Servois* [Ann. math. pures appl. 1 (1810/1), p. 332].

381) Grundlagen der Geometrie, (1re éd.) Leipzig 1899; (2e éd.) Leipzig 1903, p. 28; (3e éd.) Leipzig 1909; *D. Hilbert* se sert aussi de l'axiome des parallèles. *H. Wiener* [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. 1894, p. 72] avait fait

C'est *D. Hilbert* qui a nettement établi le caractère d'axiome qu'il faut attribuer à ces deux propositions lorsqu'on se limite au domaine de la géométrie projective plane[382]). Il a montré en outre que tout autre théorème de disposition, dans le plan, en est nécessairement une conséquence. D'ailleurs, la signification essentielle du théorème de Desargues consiste en ce qu'il donne une condition non seulement nécessaire, mais encore suffisante, que doit remplir une géométrie projective plane dans laquelle les autres axiomes projectifs du plan sont valables, pour que cette géométrie fasse partie d'une géométrie de l'espace dans laquelle les axiomes projectifs soient également valables[383]).

19. Les éléments imaginaires. Ce sont des applications d'abord inconscientes, puis plus réfléchies, du principe de continuité [n° **3**] qui ont introduit peu à peu dans le langage de la géométrie les expressions d'éléments et de figures imaginaires. Mais leur emploi ne se faisait pas sans arrière-pensée, et laissait aux adeptes de la géométrie une impression pénible; *J. Steiner* en arrive même, en certaine circonstance, à parler du „spectre" des imaginaires. De là un besoin, chez ceux qui avaient le souci de la rigueur dans leurs méthodes, de mettre au clair cette question des imaginaires, et de préciser nettement, autant que possible, les conditions légitimes de leur emploi. Ce besoin devait recevoir satisfaction de diverses manières.

Ce fut d'abord d'une manière en quelque sorte extérieure au monde des imaginaires, par ce fait que l'on reconnaissait la nécessité, dans tous les cas où certains éléments d'une démonstration deviennent imaginaires, de compléter celle-ci par une démonstration particulière n'opérant que dans le domaine réel[384]). Cette conception eut pour résultat d'attirer l'attention sur les questions de réalité des divers éléments d'une figure, et de faire qu'un problème ne devait être considéré comme complètement résolu que lorsqu'étaient élucidées toutes les questions de réalité qu'il pouvait comporter. Nous avons dit, par exemple, à propos des problèmes simples signalés aux n[os] **11** et **13**, quelles sont les questions de réalité qui s'y présentent et quelles solutions leur ont été données. Bien d'autres problèmes d'un caractère tout aussi simple ont été également complètement discutés et résolus dans le même sens: c'est, par exemple, le cas de ceux qui concernent un système de deux coniques, dont l'étude complète a été faite depuis longtemps[385]). Puis, dans le même ordre d'idées, ont été développées, sur divers problèmes isolés, des recherches aussi importantes que difficiles, parmi lesquelles nous nous contenterons de signaler, en première ligne, les travaux approfondis de *R. Sturm*[386]) concernant le système des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre et les questions de réalité relatives à la configuration formée par ces droites.

Dans une seconde conception, on cherche à justifier le rôle des imaginaires en donnant de chaque élément imaginaire une définition géométrique qui ne repose que sur des éléments réels; le but à atteindre est alors le suivant: chaque élément imaginaire doit, d'après sa définition, jouer le même rôle que l'élément réel de même nom, de sorte que la géométrie projective atteint ainsi le même degré de généralité que la géométrie analytique, ou encore que la géométrie ordinaire dans laquelle on admet le principe de continuité[387]).

observer que l'on peut aussi établir cette proposition en ayant recours aux propriétés des aires équivalentes.

382) Grundlagen[381]), (2[e] éd.) p. 51, 70, 71, 77. Il n'est pas question ici des relations qui existent entre ces deux propositions et l'axiome d'Archimède [voir à ce sujet, III 1, **18**].

383) Ceci suppose que l'on admet en outre l'axiome d'Euclide sur les parallèles. Pour plus de détails, voir III 1, **18**, **27**.

384) *H. Schröter* [J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 305] a par ex. discuté et résolu de nombreux problèmes de ce genre; l'un des premiers concerne la démonstration des propriétés, énoncées au n° **11**, qui appartiennent à la transformation corrélative du plan ou de l'espace, dans le cas où la conique, ou quadrique, directrice du système de polaires réciproques correspondant à cette transformation serait imaginaire; voir *J. Steiner*, Synth. Geom.[178]), (1[re] éd.) p. 431 et suiv.; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[170]), p. 515.

385) En particulier, la discussion du système de quatre points communs à deux coniques, ou de leur quatre tangentes communes, a d'abord été faite par *J. V. Poncelet* par une méthode mi-analytique, mi-géométrique [Propriétés projectives[15]), (1[re] éd.) p. 191 et suiv.; (2[e] éd.) p. 185 et suiv.]; puis elle a été reprise, par des procédés purement géométriques, par *F. Seydewitz* [Archiv Math. Phys. (1) 5 (1844), p. 225]; tous deux constatent que deux coniques ont toujours au moins un système de sécantes communes réelles.

Plus tard, les diverses questions de réalité relatives à un faisceau de coniques furent l'objet, de la part de divers auteurs, de discussions plus approfondies. Voir, principalement, *J. Steiner* [Synth. Geom.[178]), (1[re] éd.) p. 246, 252], *K. G. Chr. von Staudt* [Geom. der Lage[158]), p. 171], *Chr. Paulus* [Grundlinien der neueren ebenen Geometrie, Stuttgard 1853], *M. Chasles* [Coniques[15]), p. 219, 228, 230], **Cl. Servais* [Le mat. pure appl. 2 (1902), p. 254].*

En ce qui concerne les questions analogues relatives aux quadriques, cf. III 22.

386) Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867.

387) Nous ne parlons pas ici de diverses définitions d'éléments imaginaires qui reposent plus ou moins sur des faits analytiques ou numériques. Telles sont, en particulier, les définitions que donne *M. Chasles* des points, droites et circonférences imaginaires [Géom. sup.[39]), (1[re] éd.) p. 56, 546; (2[e] éd.), p. 54, 502], définitions purement analytiques, malgré la forme géométrique sous laquelle elles sont énoncées.

Les premiers essais tentés dans cet ordre d'idées sont de *J. V. Poncelet*[388]). *Il donne d'abord la définition générale d'une corde d'une conique, considérée comme déterminée par la courbe et une sécante quelconque; et cette définition s'applique à tous les cas, que la sécante rencontre la conique ou ne la rencontre pas, la corde étant dite „idéale" dans le second cas. Il suffit, pour cela, de caractériser une corde par deux éléments qui ne cessent jamais d'exister: le premier, milieu de la corde lorsque celle-ci est réelle, est le point d'intersection de la sécante avec son diamétre conjugué; le second est une grandeur bien définie, égale au carré de la demi-corde lorsque celle-ci est réelle, susceptible néanmoins d'avoir une représentation géométrique réelle dans le cas contraire[389]).*

J. V. Poncelet se pose alors le problème de la recherche des cordes idéales communes à deux coniques qui ne se rencontrent pas; cette recherche est celle des cordes pour lesquelles les deux éléments précédemment définis sont les mêmes relativement aux deux coniques. *J. V. Poncelet* arrive à établir qu'il y a toujours au moins une corde idéale commune; mais sa solution, qui repose sur la variation continue d'une grandeur géométrique, a donc plutôt un caractère analytique[390]).

388) Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 32; (2e éd.) 1, p. 31.

389) *J. V. Poncelet* [Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 28; (2e éd.) p. 28] définit cette grandeur en remarquant que, si O désigne le milieu d'une corde réelle MN, A et B les extrémités de son diamètre conjugué, le rapport

$$\varrho = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}$$

garde une valeur constante pour toutes les cordes parallèles à MN, de sorte que, inversement, à toute corde, réelle ou idéale, parallèle à MN, de milieu O', correspond la grandeur $\varrho\cdot O'A\cdot O'B$, positive ou négative. *J. V. Poncelet* représente en outre cette grandeur, pour une corde idéale de milieu O', en plaçant sur cette corde les points M', N' pour lesquels $\overline{OM'}^2=\overline{ON'}^2$ est égal à cette grandeur changée de signe; il constate que, quand la corde se déplace parallèlement à elle-même, les points M', N' décrivent une conique qu'il appelle supplémentaire de la première par rapport à la direction envisagée.*

390) Cette solution consiste à envisager d'abord les sécantes qui donnent dans les deux coniques des cordes, réelles ou idéales, ayant le même milieu. Puis, faisant varier ce point milieu sur son lieu géométrique, *J. V. Poncelet* constate, par des raisons de continuité, que les grandeurs correspondantes aux cordes des deux coniques issues de ce point milieu doivent nécessairement devenir égales pour une position au moins de ce point [Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 32/3; (2e éd.) 1, p. 31/2].

La corde idéale commune apparaît alors comme étant aussi une corde réelle commune à deux hyperboles, coniques supplémentaires des deux premières: ce fait avait été déjà constaté par *L. N. M. Carnot*, Corrélation figures géom.[16]), p. 76. En particulier, *J. V. Poncelet* [Propriétés projectives[15]), (1re éd.) p. 47; (2e éd.) 1, p. 46] déduit de là que la corde idéale de deux ellipses semblables et semblablement placées est la droite de l'infini, car cette droite est également la sécante commune des deux hyperboles correspondantes. Dans la suite, *M. Chasles* [J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 385] opère d'une manière analogue; il définit une sécante commune à deux coniques, qu'il appelle *axe de symptose* de ces deux courbes, *comme étant un lieu de points tels qu'en menant de chacun d'eux des tangentes aux deux courbes, les droites joignant les points de contact passent par deux points fixes (généralisation de la propriété de l'axe radical de deux circonférences).* Voir aussi *G. von Escherich* [Archiv Math. Phys. (1) 60 (1877), p. 22] et *Chr. Wiener* [Z. Math. Phys. 12 (1867), p. 376] *qui étendent ces notions aux quadriques.*

Dans les recherches de *J. V. Poncelet*, se manifeste cette préoccupation très juste de ne caractériser les éléments d'une question que par des propriétés essentiellement réelles et indépendantes des diverses positions ou formes de la figure; mais dans les seules applications qu'il en fait, cette idée ne prend d'autre forme que celle d'un artifice ingénieux utilisé dans les circonstances où les imaginaires n'interviennent qu'à titre d'intermédiaires, le point de départ et le but étant toujours constitués avec des éléments réels. Il n'y est pas encore question d'étudier les imaginaires en eux-mêmes, de les envisager comme des êtres géométriques ayant une individualité particulière, objets, tout comme les êtres réels, d'opérations géométriques bien déterminées. Cette conception apparaît avec netteté, sous une forme purement géométrique, dans les recherches de *K. G. Chr. von Staudt* que nous exposerons tout à l'heure, *et sous une forme ayant une origine analytique, dans celles de *E. N. Laguerre*.*

*Pour ce dernier, suivant sa propre expression[391]), «c'est l'analyse qui fournit immédiatement les notions sur lesquelles repose l'emploi des imaginaires et leur donne leur entière légitimation, le rôle de la géométrie étant ensuite de les développer, d'en poursuivre les conséquences par les moyens et avec les ressources qui lui sont propres».

Développant cette idée, *E. N. Laguerre*[392]) regarde un point imaginaire A comme représenté, dans le plan, par un vecteur PP' dont les extrémités sont les points réels situés respectivement sur les deux droites isotropes issues de A, de sorte qu'un vecteur quelconque représente toujours un point imaginaire et un seul, que les deux vecteurs PP' et $P'P$ représentent deux points imaginaires conjugués, qu'un vecteur nul représente le point réel confondu avec ce vecteur. *E. N. Laguerre* insiste sur ce fait que cette représentation, malgré son

391) *Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 241; Œuvres 2, Paris 1905, p. 98.*

392) *Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p 163, 241; Œuvres 2, Paris 1905, p. 88, 98.*

origine analytique, est indépendante du système d'axes de coordonnées, que les vecteurs représentatifs des points imaginaires d'une courbe géométriquement définie sont donc susceptibles à leur tour d'être géométriquement définis; il en donne des exemples en étudiant particulièrement la droite, la circonférence et l'ellipse.

Dans l'espace, *E. N. Laguerre*[393]) fait correspondre un point imaginaire A à un cercle parcouru dans un sens déterminé, ce cercle étant le cercle réel situé sur le cône isotrope de sommet A. Le même cercle, parcouru en sens contraire, correspond au point imaginaire conjugué. *E. N. Laguerre* étudie principalement les cercles qui correspondent aux points imaginaires d'une biquadratique gauche sphérique, et rattache leurs propriétés à celles de surfaces anallagmatiques du quatrième ordre[394]).*

La théorie de *K. G. Chr. von Staudt*[395]), contrairement à la précédente, n'emprunte rien à l'analyse et reste uniquement dans le domaine de la géométrie projective. Dans la définition fondamentale qu'il donne d'un point imaginaire, *K. G. Chr. von Staudt* reprend une idée déjà exprimée par *Chr. Paulus*[396]), d'après laquelle un tel point est représenté par une involution elliptique entre éléments réels, c'est-à-dire une involution où deux couples quelconques de points homologues chevauchent

393) *Bull. Soc. philom. Paris (6) 7 (1870), p. 95; l'Institut [Journal universel des sciences et des sociétés savantes] (1) 38 (1870), p. 155; Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 14, 108, 241; Œuvres 2, Paris 1905, p. 109, 238.*

394) Signalons quelques autres représentations géométriques des imaginaires, lesquelles ne font d'ailleurs qu'interpréter leurs définitions analytiques; les plus importantes, sur lesquelles nous revenons plus loin (note 398), sont dues à *G. Tarry* et *A. Mouchot.*

395) Voir *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856; fasc. 2, Nuremberg 1857; fasc. 3, Nuremberg 1860. On trouve une exposition complète de la théorie des imaginaires de *K. G. Chr. von Staudt* dans *H. Pfaff,* Neuere Geometrie, Erlangen 1867. Une exposition analytique de la même théorie est faite par *C. Stephanos,* Bull. sc. math. (2) 7 (1883), p. 204. D'un autre côté, *O. Stolz* [Math. Ann. 4 (1871), p. 416] montre comment les méthodes analytiques peuvent conduire à une définition des imaginaires indépendante du système de coordonnées choisi, et conforme à la théorie de *K. G. Chr. von Staudt*; voir aussi *O. Tognoli,* Giorn. mat. (1) 31 (1893), p. 137.

A. Ramorino [Giorn. mat. (2) 4 (1897), p. 242; (2) 5 (1898), p. 317] fait une étude historique des diverses théories des imaginaires.

396) Grundlinien der neueren ebenen Geometrie[385]), Stuttgard 1853.

Chr. Paulus [Archiv Math. Phys. (1) 21 (1853), p. 175; (1) 22 (1854), p. 121] avait aussi donné une autre interprétation des imaginaires à l'aide d'une involution. Il faisait intervenir alors une involution elliptique, et le couple de points homologues de distance minimée de cette involution, couple auquel correspond, dans l'involution hyperbolique, le système des deux points doubles.

les uns sur les autres. Mais, et c'est là ce qu'il y a d'original dans la pensée de *K. G. Chr. von Staudt* et ce qui lui permet de donner ensuite à la théorie son entier développement, il y ajoute une notion nouvelle, celle du *sens,* laquelle lui permet d'établir une distinction entre les deux points imaginaires conjugués constitués par les deux points doubles de l'involution; envisageant une involution sur une droite comme définie par les homologues A' et B' de deux points déterminés A et B de la droite, il observe que les deux sens de parcours que l'on peut choisir sur la droite correspondent l'un à l'ordre ABA', l'autre à l'ordre $AA'B$, et il convient de faire correspondre les deux points doubles imaginaires de l'involution à ces deux sens différents[397]). Ainsi, un *point imaginaire* est défini par une involution elliptique sur une droite réelle et un sens de parcours sur cette droite; un tel point est donc toujours sur une droite réelle; le même point peut enfin être représenté d'une infinité de manières par deux couples de points homologues d'une même involution[398]).

D'une manière analogue, un *plan imaginaire* est défini par une involution elliptique dans un faisceau de plans réels et par un sens de rotation autour de l'axe de ce faisceau; un plan imaginaire passe donc toujours par une droite réelle.

Quant aux *droites imaginaires,* il y en a deux espèces différentes.

397) *R. Sturm* [Math. Ann. 9 (1876), p. 341] a recours à la série linéaire de points formée, non plus par les points d'une droite, mais par ceux d'une conique. Comme toute involution entre les points d'une conique est complètement définie par son centre, et que ce centre, dans le cas de l'involution elliptique, est placé à l'intérieur de la conique, le procédé se ramène à celui qui consiste à représenter le système des nombres complexes par la surface à deux feuillets qui recouvre la partie du plan intérieure à la conique.

398) En particulier, *Cl. Servais* [Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. n° 3, p. 4 [1892/3]] choisit les deux couples AA' et BB' de points homologues de l'involution de façon que la division $ABA'B'$ soit harmonique; il forme ainsi ce qu'il appelle un *groupe représentatif harmonique* d'un point imaginaire.

En particularisant davantage ce mode de représentation *Cl. Servais* choisit le point B' à l'infini, et retrouve divers modes déjà connus de représentation des imaginaires; on peut définir ainsi les deux points imaginaires conjugués, soit par le système des deux points A et A', l'un correspondant au sens AA' l'autre au sens $A'A$: c'est la méthode de *A. Mouchot* [Nouvelles bases de la géométrie supérieure, Paris 1892]; on peut aussi les représenter respectivement par les vecteurs BA et BA': c'est la méthode de *G. Tarry* [Assoc. fr. avanc. sc. 18 (Paris) 1889[2], p. 60]; enfin, en menant par B les deux vecteurs BC et BC' perpendiculaires à la droite et de longueurs égales à AB, on retrouve la méthode de *E. N. Laguerre.** *Cl. Servais* rattache ainsi les deux théories de *K. G. Chr. von Staudt* et de *E. N. Laguerre.*

Une *droite imaginaire de première espèce* correspond à une involution elliptique dans un faisceau de rayons, et à un sens de rotation dans le plan de ce faisceau; elle passe par un point réel et se place dans un plan réel[399]. Une *droite imaginaire de seconde espèce* correspond à une involution elliptique entre génératrices réelles d'un même système d'une quadrique: elle ne contient aucun point réel et ne se place dans aucun plan réel. La même droite peut être définie de la même manière avec une infinité de quadriques. C'est pour cette raison que *F. August* définit une telle droite par un autre procédé[400]: il l'envisage soit comme l'intersection de deux plans imaginaires, soit comme droite menée par deux points imaginaires, de sorte que la configuration réelle qui sert de support à une telle droite est une congruence linéaire ayant pour directrices cette droite et la droite imaginaire conjuguée.

Ces définitions ainsi posées, le premier fait essentiel établi par *K. G. Chr. von Staudt* consiste dans la possibilité d'appliquer aux éléments imaginaires les axiomes projectifs fondamentaux et, plus particulièrement, ceux qui concernent les alignements de points ou les intersections de droites. *K. G. Chr. von Staudt* démontre avec soin que deux points ou deux plans déterminent une droite, que deux droites d'un même plan se coupent en un point, et que deux droites issues d'un même point déterminent un plan. On peut alors étendre aux imaginaires les méthodes de projection employées avec les éléments réels. Puis la propriété fondamentale du quadrilatère complet, propriété d'une importance capitale dans cette théorie [n° **17**], subsiste encore et permet ainsi d'étendre la notion de division harmonique au domaine des imaginaires. Enfin le couronnement de l'édifice consiste dans la démonstration de ce fait que les notions d'*ordre* et de *sens* s'appliquent encore à ce monde nouveau; il suffit pour cela d'envisager ce que *K. G. Chr. von Staudt* appelle un *jet* [*Wurf*], c'est-à-dire un système de quatre éléments imaginaires quelconques appartenant à une même série linéaire. Dans ce but, *K. G. Chr. von Staudt* opère de la façon suivante.

399) En particulier, l'involution formée par les droites rectangulaires d'un plan, issues d'un point de ce plan, définit les droites imaginaires qui joignent ce point aux ombilics du même plan, droites appelées *par *E. N. Laguerre* [Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 165; Œuvres 2, Paris 1905, p. 90]* *droites isotropes* (ou encore *droites minima*). *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge[395]) 1, p. 126] constate déjà que chacune d'elles est perpendiculaire sur elle-même.

400) Progr. Berlin 1872. Ce procédé est aussi employé par *J. Lüroth*, qui donne une exposition nouvelle de la théorie des imaginaires de *K. G. Chr. von Staudt*, Math. Ann 8 (1875), p 145.

Considérons, par exemple, quatre points imaginaires P, Q, R, S appartenant à une droite de seconde espèce, et soient p, q, r, s les droites réelles passant respectivement par chacun d'eux. Un premier cas à étudier est celui où ces quatre droites réelles appartiennent à un même système de génératrices d'une quadrique; les quatre points forment alors ce que l'on appelle un *jet neutre* [n° **21**], et l'ensemble de tous les points S qui, appartenant à une même droite imaginaire, forment des jets neutres avec trois points quelconques P, Q, R de la même droite, constitue une *chaîne* [*Kette*][401]. Dans ce premier cas, l'étude et la définition de l'ordre se ramènent immédiatement, par l'intermédiaire des génératrices d'une quadrique, aux notions analogues dans le domaine réel. Ce cas comprend en particulier celui des éléments harmoniques, et l'on retrouve encore toutes les propriétés des éléments harmoniques réels, et principalement celle-ci, que quatre éléments harmoniques se divisent en deux couples qui chevauchent l'un sur l'autre.

Dans le cas général où les quatre droites réelles p, q, r, s n'appartiennent plus à une même quadrique, on envisage d'abord une représentation du point S sur la droite s à l'aide d'une involution définie par deux couples (E, E'), (F, F') et d'un sens EFE'; puis, les trois droites p, q, r étant génératrices d'un même système d'une quadrique, on fait correspondre chaque génératrice de ce système au plan mené par cette génératrice et une génératrice fixe a de l'autre système; chacun de ces plans correspond à son tour à son point d'intersection avec la droite s. Dans ces conditions, un sens choisi sur la droite s, le sens EFE' en particulier, correspond à un sens de rotation autour de l'axe a et à un sens dans le système de génératrices de la quadrique, celui-ci étant l'un des deux sens pqr ou prq. On dit que S est placé dans le sens PQR dans le premier cas, et dans le sens PRQ dans le second[402].

401) Beiträge[395]) 2, p. 137. *Analytiquement, un jet neutre est formé de quatre éléments ayant un rapport anharmonique réel; une chaîne est formée de l'ensemble des éléments qui associés à trois éléments donnés ont des rapports anharmoniques réels.*

402) Il y a lieu de démontrer, ce que fait *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge[395]) 1, p. 34] que ce résultat est indépendant du choix de la droite a. D'ailleurs, le sens défini plus haut ne dépend uniquement que de la région dans laquelle se place la droite s par rapport au système de génératrices de la quadrique; cette droite s ne coupe la quadrique en aucun point réel car elle rencontre la droite imaginaire qui contient les quatre points P, Q, R, S et celle-ci appartient elle-même à la quadrique. Cf. *J. Lüroth*, Math. Ann. 8 (1875), p. 163.

Partant de ces définitions, on démontre alors que, dans une correspondance projective *réelle*, un jet neutre correspond toujours à un autre jet neutre, en particulier qu'un jet neutre harmonique correspond à un autre jet neutre harmonique, enfin que deux jets homologues non neutres sont toujours de même sens. De là résulte la possibilité[403]) de définir alors la correspondance projective la plus générale comme une correspondance biuniforme dans laquelle un jet neutre correspond à un autre jet neutre, et un jet non neutre à un autre jet non neutre de même sens[404]).

De là on passe ensuite à la définition d'une correspondance homographique ou d'une correspondance réciproque entre deux plans ou entre deux espaces.

Notons, parmi les résultats les plus importants auxquels conduit cette théorie, ce fait que *K. G. Chr. von Staudt* arrive à définir une conique ou quadrique imaginaire, qu'il envisage comme courbe ou surface directrice d'un système de figures polaires réciproques réelles, autrement dit, comme le lieu des points réels ou imaginaires qui sont placés sur leur droite ou plan polaire; il montre en outre que les propriétés projectives des coniques ou quadriques réelles s'étendent encore au domaine des imaginaires[405]).

K. G. Chr. von Staudt applique en outre ces notions à une série de propositions et problèmes dont les démonstrations ou solutions nécessitent, en certaines de leurs parties, le recours à des éléments imaginaires. Il ne s'agit plus alors que de présenter ces démonstrations ou solutions sous une forme absolument générale. L'exemple de *K. G. Chr. von Staudt* devait ensuite provoquer de nombreuses recherches du même genre[406]). Citons seulement les plus importantes.

R. Staudigl[407]) donne une solution complète du problème de la construction d'une conique définie par cinq points ou tangentes, dans les cas où deux ou quatre de ces données deviennent imaginaires. *F. Hofmann*[408]) étudie avec beaucoup de développements le système de deux coniques bitangentes et les constructions qui s'y rapportent. *K. Bobek*[409]) traite les questions analogues concernant les quadriques, et plus particulièrement la construction du huitième point d'intersection de trois quadriques passant par sept points donnés lorsque six de ces derniers sont imaginaires; il étudie également la quartique gauche de première espèce définie par huit points imaginaires. *C. Hossfeld*[410]) donne la construction d'une quadrique définie par neuf points dont huit sont imaginaires et d'une cubique gauche définie par six points imaginaires. *Cl. Servais*[411]) fait une discussion approfondie des cubiques gauches. *Chr. Beyel*[412]) étudie les figures planes homologiques, dans

Analytiquement, le sens d'un jet non neutre correspond au signe du coefficient de i, dans l'expression de son rapport anharmonique.

403) Ceci est conforme au principe dit de la permanence de lois formelles de *H. Hankel* [I 1, **11**].

404) Beiträge[395]) 2, p. 142. Dans une pareille correspondance, un jet harmonique formé d'éléments imaginaires correspond également à un jet harmonique. Si l'on définissait seulement la correspondance par cette condition qu'un jet harmonique corresponde à un autre jet harmonique, il pourrait arriver que deux séries linéaires d'éléments, superposées et projectives, aient en commun tous leurs éléments réels, mais que leurs éléments imaginaires s'échangent entre eux. C'est la raison pour laquelle *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge[395]) 2, p. 147] impose à la correspondance la condition relative au sens; par le fait, il exclut ainsi les correspondances que nous étudions au nº **20** sous le nom d'*antiprojectivités.*

405) L'application de ces notions à l'étude de la gerbe conduit *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge[395]) 1, p. 128] à constater que le mot orthogonal a la même signification que celui de conjugué par rapport à l'ombilicale, et que deux gerbes supplémentaires ne sont autre chose que deux gerbes polaires réciproques par rapport au cône isotrope. Cf. *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 5 (1860), p. 245.

406) *A. del Re* [Giorn. mat. (1) 28 (1890), p. 257] envisage le théorème sur l'involution des points d'intersection d'une transversale avec les côtés d'un quadrangle complet.

407) Sitzgsb. Akad. Wien 61 II (1870), p. 607. Certains cas particuliers de ce problème avaient été déjà traités par *F. Seydewitz* [Archiv Math. Phys. (1) 5 (1844), p. 331] et *Chr. Paulus* [Grundlinien der neueren ebenen Geometrie[386]) Stuttgard 1853, § 118; Archiv Math. Phys. (1) 22 (1854), p. 121]. Voir à ce sujet *M. Chasles*, Coniques[15]), p. 226; *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, J. math. pures appl. (2) 4 (1859), p. 82, 88; *C. Hossfeld*, Diss. Iéna 1882; *R. Böger*, Diss. Leipzig 1886; *V. Retali*, Memorie Ist. Bologna (4) 7 (1885/6), p. 601; (4) 9 (1887/8), p. 259; *F. Spath*, Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 237; *F. Ruth*, id. 3 (1892), p. 81; *K. Schober*, Konstruction von einem Kegelschnitte aus imaginären Elementen, Innsbruck 1892; *F. Machovec*, Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 95; *J. Thomae*, Z. Math. Phys. 38 (1893), p. 381; 39 (1894), p. 63; *R. Böger*, Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), p. 352 [1898].

408) Die Konstructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken, Leipzig 1886.

409) Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1882, p. 65.

410) Z. Math. Phys. 33 (1888), p. 111, 187.

411) Sur les imaginaires en géométrie [Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. nº 3]; Sur le système focal [id. 52 (1894/5), mém. nº 2]; La projectivité imaginaire [id. 52 (1894/5), mém. nº 3]. Ces mémoires contiennent, ainsi qu'il est dit note 398, une exposition nouvelle de la théorie de *K. G. Chr. von Staudt*, avec des applications à la théorie des coniques.

412) Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 31 (1886), p. 20.

le cas où le centre, l'axe et le rapport anharmonique caractéristique [n° **13**] de l'homologie deviennent imaginaires.

La théorie de *K. G. Chr. von Staudt* a été, à diverses reprises, modifiée dans des termes qui n'altèrent pas ses points essentiels. *F. Klein*[413]) a montré le premier que, pour définir un point imaginaire, on peut remplacer une involution elliptique par toute projectivité cyclique [n° **14**] ayant les mêmes points doubles (imaginaires); cette idée devait être ensuite reprise et développée par *J. Lüroth*[414]). La projectivité cyclique la plus simple qui convienne est celle du troisième ordre, car, d'une part, elle est définie par un groupe cyclique de trois points A, B, C, et, d'autre part, ce qui n'est pas lorsqu'on est dans le cas de l'involution, ce groupe cyclique permet d'établir la distinction entre les deux points imaginaires conjugués que l'on fait correspondre, l'un au sens ABC, l'autre au sens CBA[415]).

La même idée a été reprise sous une forme encore plus générale, dans les travaux de *H. Wiener*[416]) et de *F. Amodeo*[417]). Le premier part de cette remarque que si P est une transformation homographique ayant deux points doubles réels M et N, les transformations $\mathrm{P}, \mathrm{P}^2, \mathrm{P}^3, \ldots$ font correspondre à un même point A une suite de points $A_1, A_2, A_3, \ldots$ formant un groupe cyclique et tendant vers un point limite qui est l'un des points doubles M et N, tandis que les transformations $\mathrm{P}^{-1}, \mathrm{P}^{-2}, \mathrm{P}^{-3}, \ldots$ font correspondre au même point A la suite des points $A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, \ldots$, qui a pour point limite l'autre point double. Les suites de points ayant pour origines deux points différents A et B sont en outre en relation projective [n° **23**]. Dans ces conditions, on peut, dans le cas d'une transformation homographique à points doubles imaginaires, employer les deux suites analogues pour définir ces points imaginaires: l'un d'eux correspondant à la suite $A, A_1, A_2, \ldots$, l'autre à la suite $A, A_{-1}, A_{-2}, \ldots$; la notion de sens fait place ici à celle de transformations inverses P et P^{-1}.

F. Amodeo envisage, en même temps que la transformation homographique P, le faisceau des transformations homographiques [n° **22**] avec lesquelles elle est échangeable: celles-ci admettent les mêmes points doubles et par suite peuvent aussi être utilisées, tout comme la première, pour définir ces points doubles. Ce faisceau comprend en particulier une involution et une seule et une infinité de transformations cycliques. Si l'on emploie la première, on retrouve, comme cas particulier, le mode de définition de *K. G. Chr. von Staudt*; si l'on emploie l'une de ces secondes, on retrouve celui de *F. Klein* et *J. Lüroth*.

Une autre modification dans les principes fondamentaux de cette théorie des imaginaires est due à *C. Segre*[418]), lequel prend comme point de départ la définition du *couple de points imaginaires* et non plus celle du point seulement, définition qui suffit dans un grand nombre de questions et, par exemple, dans toutes celles où il n'y a aucune nécessité de séparer deux points imaginaires conjugués. On sait que chaque couple de points réels peut être défini par une involution dont ils sont les points doubles; il en sera de même pour un couple de points imaginaires, et alors, il y a avantage à considérer cette involution comme étant l'involution *associée* [n° **22**] à toutes les projectivités P ayant les mêmes éléments doubles, autrement dit à un faisceau de projectivités. Cette idée apparaît comme simple et féconde par ce fait qu'elle permet d'employer les opérations sur les projectivités. On peut de même, dans l'espace, définir un couple de droites imaginaires conjuguées de seconde espèce par une homologie involutive gauche appartenant à un faisceau d'homologies gauches.

20. Antiprojectivité ou symétralité. On doit à *C. Juel*[419]) et *C. Segre*[420]) une extension féconde de la théorie des imaginaires de *K. G. Chr. von Staudt*: elle répond à un cas dont ce dernier avait laissé systématiquement l'étude de côté. Dans la définition qu'il donne d'une correspondance projective, il s'impose en effet dans le domaine des imaginaires la condition[421]) que deux jets homologues non neutres soient de même sens. Or on peut envisager des correspondances projectives ne satisfaisant plus à cette condition de sens, toutes les autres conditions relatives aux jets neutres restant toujours remplies; on en a un exemple simple avec deux ponctuelles superposées dont tous les éléments réels sont à eux-mêmes leurs homologues, alors que deux éléments imaginaires conjugués se correspondent entre eux[421]). D'une façon générale, une correspondance de cette nature entre deux séries linéaires d'éléments peut être définie analytiquement, en partant d'une relation bilinéaire entre deux variables x et y convenablement

413) Nachr. Ges. Gött. 1872, p. 375; réimpr. Math. Ann. 22 (1883), p. 242.

414) Math. Ann. 11 (1877), p. 84.

415) Pour plus de détails, cf. III 3, **15**.

416) Habilitationsschrift, Halle 1885.

417) Giorn. mat. (1) 26 (1888), p. 363.

418) Memorie Accad. Torino (2) 38 (1888), p. 3/24 [1886].

419) Diss. Copenhague 1885; Acta math. 14 (1890/1), p. 1.

420) Atti Accad. Torino 25 (1889/90), p. 276, 430; 26 (1890/1), p. 35; Math. Ann. 40 (1892), p. 413.

421) Voir note 404.

choisies, et en faisant correspondre l'élément représenté par la variable x à l'élément représenté par l'imaginaire conjuguée de y; de sorte que, en particulier, les rapports anharmoniques de quatre éléments, deux à deux homologues, sont non plus égaux, mais imaginaires conjugués[422]). Cette correspondance est appelée *symétralité (Symmetralität)* par *C. Juel* et *antiprojectivité (Antiprojectivität)* par *C. Segre.*

C. Juel établit l'existence d'une symétralité de la façon suivante. On observe d'abord que, étant donnée une droite imaginaire de seconde espèce d, les droites réelles, supports des points de d, forment la même congruence linéaire que les droites réelles, supports des plans menés par d. Cela étant, si l'on envisage deux droites imaginaires de seconde espèce, d et d', comme placées dans deux espaces différents Σ et Σ', on peut établir entre ces deux espaces une correspondance homographique et une correspondance corrélative telles que, dans chacune d'elles, trois droites de la première congruence correspondent à trois droites de la seconde. Cette correspondance définit alors une relation entre les points des deux droites d et d'. Dans le premier cas, celui d'une correspondance homographique entre Σ et Σ', on a une correspondance projective proprement dite entre les droites d et d'; dans le second cas, celui d'une correspondance corrélative, on obtient une *symétralité.*

C. Segre aboutit à une *antiprojectivité* en partant de la définition fondamentale de *K. G. Chr. von Staudt* [nº **16**], et en n'acceptant pas la restriction imposée par la condition de sens. En suivant alors le mode de démonstration de *G. Darboux* [nº **16**], il obtient ainsi, dans le domaine des imaginaires, deux formes différentes de correspondance satisfaisant toutes deux au théorème fondamental; les premières donnent la correspondance homographique et les autres l'*antiprojectivité*; elles sont les unes aux autres dans le même rapport que le déplacement d'une figure invariable dans l'espace et la symétrie par rapport à un point; le produit $A_1 A_2$ de deux antiprojectivités A_1 et A_2 [nº **23**] est donc une homographie. Une antiprojectivité A est encore définie par trois couples de points homologues; elle admet, dans le cas général, deux points remarquables M et N qui, suivant les cas, sont des points doubles ou s'échangent dans la correspondance[423]).

Cette théorie s'étend immédiatement au plan et à l'espace, dans

422) Voir à ce sujet la représentation analytique de *G. Sforza*, Giorn. mat. (1) 30 (1892), p. 159.

423) Si A et A' sont deux points homologues quelconques, le rapport anharmonique $(MNAA')$ a sa valeur absolue invariable dans le premier cas, et son argument invariable dans le second.

lesquels apparaissent deux transformations nouvelles, les *anticollineations* et les *anticorrélations* (ou *antiréciprocités*). Avec les transformations homographiques ou corrélatives, elles constituent encore les seules correspondances biuniformes et continues dans lesquelles des éléments unis correspondent à des éléments unis. Une anticollinéation plane A est complètement définie par quatre couples de points homologues; dans le cas général, ses éléments remarquables, éléments doubles ou éléments se permutant entre eux, forment un triangle; ce cas général se subdivise en deux autres: dans le premier, les seuls éléments doubles sont les sommets et côtés de ce triangle; dans le second cas, un sommet de ce triangle et le côté qui lui est opposé sont les seuls éléments doubles, les deux autres sommets et les deux autres côtés s'échangeant entre eux dans la transformation.

Parmi les formes particulières que peut affecter une antiprojectivité, la plus importante est constituée par une *antiinvolution*; on en trouve un exemple remarquable dans le cas déjà signalé d'une droite réelle dont tous les points réels restent invariables alors que chaque point imaginaire s'échange avec le point imaginaire conjugué. Cet exemple ne représente pas cependant le type général de l'*antiinvolution* sur une droite, car dans une transformation de cette nature il n'existe en général aucun point double et, s'il y en a un, il en existe une infinité, auquel cas tous ces points doubles forment une *chaîne* au sens de *K. G. Chr. von Staudt* [nº **19**].

Dans le plan, une antiinvolution admet toujours des points doubles, en nombre infini, formant une multiplicité à deux dimensions, et constituant donc, dans le plan, une généralisation naturelle de la notion de chaîne: *C. Juel* la désigne sous le nom de *chaîne à deux dimensions* et *C. Segre* sous celui de *chaîne plane.*

En passant à l'espace, on retrouve des antiinvolutions n'admettant aucun point double; c'est le cas général, et toute autre antiinvolution en admet une triple infinité formant une *chaîne dans l'espace.*

Une chaîne est complètement définie, sur une droite par trois points, dans le plan par quatre points, dans l'espace par cinq points; elle peut être construite, en partant de ces éléments, à l'aide des méthodes suivies dans les transformations homographiques réelles et principalement par la méthode des réseaux de Möbius[424]).

424) *C. Juel* appelle droite *adjointe* à une chaîne plane une droite ayant en commun avec celle-ci une chaîne linéaire, et montre que l'on peut aussi définir une chaîne à l'aide de droites adjointes, une chaîne plane pouvant par exemple être définie par trois points et une droite adjointe.

On peut encore définir également les chaînes à l'aide de faisceaux, gerbes, etc., placés en ce que l'on appelle relation antiperspective.

Les chaînes constituent enfin les types les plus simples de multiplicités à une, à deux ou à trois dimensions que l'on puisse séparer dans les multiplicités à deux, à quatre ou à six dimensions constituées par l'ensemble des éléments imaginaires de la droite, du plan ou de l'espace; pour cette raison, *C. Segre* les désigne aussi sous le nom de multiplicités hyperalgébriques. [Sur ce point, et sur la signification de ces diverses notions, cf. III 3, **15** et suiv.].

Signalons, en dernier lieu, que les *anticorrélations* possèdent des propriétés analogues aux transformations corrélatives réelles, mais qu'elles en diffèrent aussi sur un certain nombre de points essentiels.

21. Le calcul des jets. Une fois établie, avec la théorie de *K. G. Chr. von Staudt*, l'identité de ces deux domaines, celui de la géométrie projective et celui de la géométrie analytique, il y a lieu de montrer que la notion de coordonnées, qui se trouve à la base de toutes les considérations et de tous les calculs de la géométrie analytique, peut aussi se définir par des considérations de géométrie pure, indépendantes toujours des axiomes métriques, puis, en restant dans le même ordre d'idées, d'établir les lois du calcul de ces coordonnées. C'est là encore un problème capital que *J. V. Poncelet* avait abordé, dont il avait donné une solution approchée avec son principe de continuité, et dont *K. G. Chr. von Staudt* devait enfin découvrir la solution naturelle et définitive.

Les éléments essentiels de cette solution consistent dans le rapprochement de ces deux considérations que, d'une part, la notion de mesure, dans la géométrie métrique de la droite, peut se ramener à celle de rapport anharmonique, et que, d'autre part, la détermination des coordonnées d'un point, en géométrie analytique, ne repose le plus souvent que sur des notions et des constructions tout à fait indépendantes de la géométrie métrique. Partant de là, le premier point à réaliser était donc de donner du rapport anharmonique une définition indépendante de toute idée de mesure; après quoi, il y avait à établir que cet élément se prête aux règles ordinaires de calcul.

K. G. Chr. von Staudt résout cette première partie du problème en envisageant a priori comme un élément des opérations de la géométrie le système de quatre points en ligne droite, élément qu'il appelle *jet* (*Wurf*) [n° **7**]; puis en regardant deux jets comme égaux, par définition, lorsque leurs quatre points peuvent se correspondre deux à deux dans une relation projective. Cette définition s'applique

immédiatement au domaine imaginaire; elle donne au jet le caractère d'un *invariant projectif*; elle permet enfin d'appliquer immédiatement, pour déterminer d'une manière projective les coordonnées d'un point, un procédé donné par *A. F. Möbius*[425]), procédé ne faisant appel qu'à la notion de rapport anharmonique et n'exigeant que des constructions s'effectuant à l'aide de la règle seulement.

La seconde partie du problème, la plus importante, celle qui consiste à définir les règles du calcul des jets, a été également résolue d'une manière magistrale par *K. G. Chr. von Staudt.* Il définit la somme[426])

$$S = U + U'$$

de deux jets U et U' par cette condition que, si l'on a

$$U = (ABCM), \quad U' = (ABCM')$$

et

$$S = (ABCD),$$

M et M' sont points homologues dans une involution définie par le point double A et les deux points homologues B et D[426a]); de sorte que, U et U' étant donnés, on construit S en choisissant arbitrairement trois points A, B, C sur une droite, et en construisant d'abord les points M, M', puis le point D défini par la relation projective

$$(ABMM') = (ADM'M).$$

De même, le produit[427]) de deux jets est défini par la condition que, si l'on a les deux jets

$$U = (ABMM'), \quad U' = (ABM'M''),$$

---

425) Le système de coordonnées envisagé par *A. F. Möbius* ne s'applique que dans le domaine réel; il repose sur les méthodes du calcul barycentrique et sur l'emploi systématique de la construction par réseaux, déjà maintes fois citée. *A. F. Möbius* [Der baryc. Calcul[65]), p. 273/81; Werke 1, p. 243/51] constate que tout point qui peut être atteint par l'application répétée de cette construction correspond à un système de trois nombres rationnels et que, inversement, à tout système de cette nature correspond un point qui peut ainsi être construit par l'emploi de la règle. Ceci a été retrouvé sous une forme plus générale, dans une étude synthétique des divers systèmes de coordonnées, par *W. Fiedler* [Viertelj. Naturf. Ges. Zürich, 15 (1870), p. 152]. Voir également *J. Hemming* [id. 16 (1871), p. 41], qui discute le problème de la transformation de coordonnées, pour le cas de coordonnées projectives. Pour plus de détails sur les divers systèmes projectifs de coordonnées, voir l'article III 7.

426) Beiträge[395]) 2, p. 166. Voir, *H. Pfaff*, Neuere Geometrie, Erlangen 1867.

426a) *Les règles du calcul des jets sont énoncées ici avec la notation universellement adoptée aujourd'hui, laquelle n'est pas celle de *K. G. Chr. von Staudt*, celui-ci désignant par (A, B, C, D) ce que nous représentons par (A, C, B, D).*

427) Beiträge[395]) 2, p. 171.

leur produit est représenté par le jet

$$P = (ABMM''),$$

et sa construction se déduit immédiatement de cette définition.

Ces définitions établies, *K. G. Chr. von Staudt* montre facilement ensuite que cette somme et ce produit de jets obéissent aux mêmes lois fondamentales que les deux opérations analytiques de même nom[428]).

Il existe une classe de jets jouissant de propriétés particulières remarquables: c'est celle des *jets neutres*, c'est-à-dire des jets formés de quatre points réels, ou de quatre points imaginaires ayant pour supports réels quatre génératrices d'un même système règlé [n° **19**]; l'ensemble de ces jets, appelé *chaîne*, correspond à l'ensemble des nombres réels; en particulier, le jet harmonique correspond au nombre — 1.

Il y a lieu de signaler ensuite les deux jets qui correspondent aux deux unités complexes: chacun de ces jets est tel que son carré soit un jet harmonique, ces deux jets se distinguant par le sens. La considération de ces deux jets permet de donner une représentation d'un jet non neutre, laquelle fait intervenir les définitions et propriétés de l'addition et de la multiplication, et correspond à la représentation analytique d'un nombre complexe.

J. Lüroth[429]) a notablement étendu ces résultats fondamentaux. Il distingue dans les jets neutres les jets positifs et les jets négatifs, définit la valeur absolue d'un jet non neutre, montre alors que toutes les relations de grandeur relatives aux nombres complexes, connues en analyse, s'appliquent également à la théorie des jets; en particulier, il leur étend les notions fondamentales relatives aux fonctions entières d'une variable et, principalement, celles qui concernent la continuité et les zéros d'une pareille fonction.

Ainsi se trouve peu à peu édifiée, par des considérations purement géométriques et indépendantes de toute notion métrique, cette théorie qui, basée sur les idées fondamentales de *K. G. Chr. von Staudt*, aboutit à un système de coordonnées bien déterminé, et à l'application des méthodes analytiques dans toute leur ampleur [cf. III 3, n^os **14** et **15**].

22. Les diverses manières d'envisager les problèmes de la géométrie projective. On vient de constater, dans ce qui précède, la possibilité de donner à la géométrie projective des bases indépendantes de la géométrie métrique; il reste ensuite à chercher si, dans ses développements ultérieurs, elle ne peut pas continuer à tirer d'elle-

428) Beiträge[396]) 2, p. 167, 172 et suiv.

429) Math. Ann. 8 (1875), p. 145, en partic. p. 188.

même tous les moyens et procédés que l'algèbre procure à la géométrie métrique. Pour cela, il lui faut, avant toute chose, définir avec ses seules ressources les figures dont elle fait l'étude, et cela, sous une forme ayant le caractère de l'*invariance projective*; en outre, il reste à établir la complète équivalence de ces méthodes et de leurs résultats avec ceux et celles de la géométrie analytique. Nous laissons ici de côté toutes les considérations qui reposent sur l'énumération de constantes.

Cette conception de la géométrie projective se trouve déjà chez *J. V. Poncelet*[430]) quand celui-ci, pour établir que la projection d'une conique est une autre conique, fait remarquer qu'une certaine relation métrique, déjà connue des Grecs, suffisante pour définir une conique, possède bien le caractère projectif.

La même conception se retrouve également dans *J. Steiner*, lorsque ce dernier donne un mode projectif de génération d'une conique. Dans un premier essai [n° **10**], essai défectueux renfermant une lacune, il invoque cette considération qu'une conique peut être obtenue par la section oblique d'un cône circulaire droit, et qu'un cercle peut être engendré par l'intersection de droites appartenant à deux faisceaux de rayons égaux; mais il n'arrive pas à établir géométriquement ce fait essentiel que tout cône projetant une conique admet des sections circulaires[431]). C'est pour cette raison que, plus tard, changeant de méthode pour suivre la seule voie possible dans cet ordre d'idées[432]), il définit une conique comme la courbe engendrée par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques, et démontre

430) Propriétés projectives[15]), (1^re éd.), p. 20; (2^e éd.) 1, p. 21. *A la vérité, *J. V. Poncelet* définit d'abord une conique comme la section d'un cône oblique à base circulaire; mais il transforme cette définition en établissant la relation de Carnot, avec tous ses cas particuliers; c'est l'un de ces derniers cas, dont il établit la réciproque, qui lui donne une nouvelle définition d'une conique.*

431) On ne peut arriver à établir cette proposition qu'en invoquant certaines propriétés particulières d'un cône et du système de polaires réciproques qu'il définit, et principalement celles qui se rapportent aux axes focaux et aux sections cycliques de ce cône. On trouve un exposé complet de la question, par exemple, dans *H. Schröter* [Oberflächen zweiter Ordnung[170]), p. 51] et dans *Th. Reye* [Geometrie der Lage, (2^e éd.) 1, Hanovre 1877, p. 151; (3^e éd.) 1, Leipzig 1886, p. 179; (5^e éd.) 1, Leipzig 1909, p. 204; trad. *O. Chemin*, Leçons sur la géométrie de position 1, Paris 1881, p. 187. *Déjà *R. Descartes* [en 1641; Epistolae 3, (2^e éd.) Francfort s/M. 1692, p. 267; Œuvres, éd. *Ch. Adam* et *P. Tannery* 3, Paris 1899, p. 707] avait énoncé cette proposition et tenté une démonstration.*

432) C'est ce que fit *J. Steiner* dans ses leçons [Synth. Geom.[178]) 2, (1^re éd.) préface p. VII].

que les diverses courbes particulières connues jusque là sous le nom de coniques rentrent toutes dans cette définition générale.

Enfin, *K. G. Chr. von Staudt* est arrivé à une définition géométrique des coniques ayant le même degré de généralité que la définition analytique, en considérant une conique comme la courbe directrice d'un système polaire [n° **13**].

Ces deux définitions de *J. Steiner* et de *K. G. Chr. von Staudt* constituent un exemple type de celles qui conviennent à des figures d'ordre plus élevé, pour lesquelles il y a lieu de recourir soit aux procédés projectifs de génération des figures, soit à des définitions qui reposent sur une correspondance entre éléments d'une même figure. Mais ici apparaît une difficulté qui tient essentiellement à la nature de la méthode. Il est manifeste en effet que, dans la conception de la géométrie projective, on ne peut recourir ni au théorème de Bézout, ni au principe de correspondance; pour démontrer, par exemple, que certaine surface est une surface générale du troisième ordre, il ne suffit pas seulement d'établir que son mode de génération se ramène à celui qui sert de définition à une surface du troisième ordre, il faut démontrer de plus que chacun des deux modes de génération peut se déduire de l'autre[433]).

J. Steiner donne un premier exemple d'une question traitée à ce point de vue lorsque, dans ses leçons[434]), il établit soit l'identité d'une conique engendrée par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques avec la conique enveloppe de la droite joignant les points homologues de deux ponctuelles homographiques, soit l'identité des quadriques règlées définies de la même manière avec deux faisceaux homographiques de plans ou deux ponctuelles homographiques non situées dans un même plan. Cette identité de deux quadriques peut aussi être établie à l'aide de la théorie des pôles et polaires.

Il y a lieu d'envisager de la même façon la théorie des cubiques gauches: *M. Chasles*[435]), étudiant l'ensemble des points d'une pareille courbe ainsi que l'ensemble de ses plans osculateurs, constate d'abord

433) Primitivement, on se contentait, il est vrai, pour démontrer que certaine courbe est une courbe d'ordre n, d'établir qu'une droite la coupe en n points. Dans le même ordre d'idées, on trouve comme proposition fondamentale, dans la théorie générale des courbes planes de *L. Cremona* [Atti Ist. Bologna (1) 12 (1861), p. 329; Introduzione ad una teoria geometria delle curve piane, Bologne 1862, p. 32; trad. allemande par *M. Curtze,* Greifswald 1865, p. 44] que deux courbes planes de degrés n et n' se coupent en nn' points.

434) Synth. Geom.[178]) 2, (1re éd.) p. 100, et préface p. VIII.

435) J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 397.

que la figure corrélative d'une cubique gauche est une autre cubique gauche; puis *H. Schröter*[436]), précisant davantage, montre qu'il y a identité entre la courbe lieu du point d'intersection des trois plans homologues de trois faisceaux de plans homographiques deux à deux, et l'arête de rebroussement de la développable engendrée par le plan mené par les points homologues de trois ponctuelles homographiques deux à deux. Une cubique gauche peut encore être engendrée d'une autre manière, à l'aide de deux gerbes en correspondance homographique: l'ensemble des droites d'intersection des plans homologues de ces deux gerbes constitue la congruence des cordes d'une cubique gauche, et cette courbe est également le lieu du point de rencontre des rayons homologues sécants de ces deux gerbes. *M. Chasles* a d'abord affirmé sans démonstration, et *Th. Reye*[437]) a établi plus tard d'une manière complète, que la courbe ainsi engendrée est identique à celle que l'on obtient avec trois faisceaux de plans homographiques deux à deux.

Enfin *F. Schur*[438]) a établi l'identité de la cubique plane, engendrée par un faisceau de droites et un faisceau de coniques en correspondance homographique, et de la courbe, dite Tripelcurve[439]), lieu des points dont les polaires par rapport à trois coniques fixes sont concourantes. *J. Steiner*[440]) et *Th. Reye*[441]) avaient d'ailleurs déjà traité certains cas remarquables de ce problème.

Cette même question de l'identité de deux figures obtenues par deux modes de génération différents se rencontre encore en de nombreuses circonstances, sans que d'ailleurs elle ait toujours été résolue, ou sans même que le besoin de la résoudre ait été compris; *F. Schur*[438]) a précisément insisté sur la nécessité d'une solution de ces divers problèmes.

Une seconde question, de même nature que la précédente, se ren-

436) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 27.

437) Geometrie der Lage, (1re éd.) 2, Hanovre 1868, p. 72; (2e éd.) 2, Hanovre 1880, p. 92; (3e éd.) 2, Leipzig 1892, p. 197; (4e éd.) 2, Stuttgard (Leipzig) 1907, p. 168; trad. *O. Chemin,* Leçons sur la géométrie de position 2, Paris 1882, p. 103.

438) Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 119. *A. Milinowski* [id. 21 (1876), p. 427; 23 (1878), p. 85, 211] avait déjà tenté de résoudre le même problème.

439) „Ce nom provient de ce fait que la même courbe peut être aussi envisagée comme lieu des sommets des triangles conjugués par rapport à deux coniques du réseau défini par les trois coniques données."

440) Synth. Geom.[178]) 2, (1re éd.) p. 530.

441) Geometrie der Lage[437]), (2e éd.) 2, p. 208; (3e éd.) 3, p. 71; (4e éd.) 3, p. 68; trad. *O. Chemin* 2, p. 224.

contre lorsqu'il s'agit d'établir que certaine figure géométrique est déterminée d'une manière unique par un certain nombre d'éléments donnés, points, droites ou plans. Dans ce cas, l'un des caractères de la géométrie projective étant précisément qu'elle conduit à des procédés de construction de diverses figures, le problème doit être considéré comme résolu, et la construction de la figure comme effectuée, lorsque les éléments donnés permettent de réaliser un mode de génération de cette figure. C'est par exemple un problème qui est résolu, dans l'enseignement élémentaire, pour la conique définie par cinq de ses points. La question se présente sous une forme moins simple lorsqu'il s'agit de construire, à l'aide de la règle seulement, soit des courbes d'ordre plus élevé, soit des figures de l'espace; elle soulève de nombreux problèmes qui ont été, jusqu'à une époque très récente, l'objet de bien des recherches [cf. III 20, III 21, III 22 et III 24].

Une autre question intéressante, concernant les méthodes de la géométrie projective, est celle de savoir s'il est permis, et jusqu'à quel point il peut être permis, de *particulariser* les figures ou les problèmes, sans diminuer en rien la généralité des résultats obtenus. C'est un point que l'école française avait admis depuis longtemps, d'une manière plus ou moins consciente, faisant ainsi une application directe du principe de continuité, lorsque, dans l'étude d'une courbe ou d'une surface, elle faisait jouer un rôle particulier à la droite ou au plan de l'infini. A la même époque, les maîtres de l'école allemande pensaient au contraire qu'une pareille spécialisation devait être envisagée comme une atteinte à la généralité de la recherche. Mais par la suite, sous l'influence principalement de *F. Klein*[442]), une évolution devait s'effectuer dans ces idées. Ce géomètre, constatant que, en géométrie analytique, un choix particulier de coordonnées peut en certains cas, s'il est fait d'une manière heureuse, donner à l'énoncé

442) Voir, par exemple, l'article de *F. Klein* [Math. Ann. 6 (1873), p. 555] sur les surfaces du troisième ordre, puis un travail de *C. Rodenberg* [Math. Ann. 14 (1879), p. 46] inspiré par cet article, et enfin, un modèle de surface du même auteur, édité chez *L. Brill* à Darmstadt (aujourd'hui *M. Schilling* à Leipzig), et publié postérieurement à un autre modèle, non symétrique, dû à *Chr. Wiener*.

Voir aussi, comme autre exemple, l'article où *F. Klein* démontre que l'hexagone trouvé par *A. Clebsch* [Math. Ann. 4 (1871), p. 336], formant de dix manières différentes un hexagone de Brianchon, est réalisé avec les six diagonales principales de l'icosaèdre [Math. Ann. 12 (1877), p. 531].

Cette question présente aussi une grande importance dans la théorie des configurations. Voir par ex. *Th. Reye* [Acta math. 1 (1882/3), p. 97] qui démontre que la configuration des tétraèdres desmiques peut être réalisée avec le cube et l'octaèdre.

d'un problème général une forme extrêmement simple, s'est efforcé d'arriver, en géométrie projective, à réaliser la même simplification. Ce résultat devait être atteint le jour où il fut reconnu que tout système de coordonnées, toute notion de mesure, peut se définir sous une forme ayant un caractère purement projectif. Aussi est-il aujourd'hui d'un usage courant de donner à tout problème, par la pensée, une forme spéciale, et de généraliser ensuite par voie projective les résultats obtenus. C'est ainsi par exemple que l'on ramène une projectivité cyclique à une rotation [n° **14**], une involution hyperbolique à une symétrie [n° **13**], et que l'on met immédiatement en évidence les lois de ces transformations générales. C'est de cette façon que *R. Krause*[443]) a étudié les projectivités cycliques des domaines ternaire et quaternaire. Ainsi se trouvent légitimées les applications du principe de continuité, en même temps que sa nature projective est établie.

Un autre procédé de simplification des divers problèmes repose sur une conception due à *H. Wiener*; il revient à décomposer toute opération générale de la géométrie en un produit de transformations symétriques; *H. Wiener* développe cette idée pour une certaine catégorie de questions [n° **23**].

Reste enfin à signaler ici deux problèmes des plus importants. Il faut chercher quels sont, en géométrie projective, les équivalents de la proposition fondamentale de l'algèbre[444]) et de la théorie des invariants, et cela, sans quitter le domaine de la géométrie projective, constituée avec les figures fondamentales et les méthodes de projection, définies, les unes et les autres, pour des éléments réels seulement. En ce qui concerne la proposition fondamentale de l'algèbre, il s'agit d'arriver à définir un groupe de n points qui correspondraient aux racines d'une équation d'ordre n; *K. G. Chr. von Staudt* a fait un premier pas dans cette voie en arrivant à représenter au moyen d'involutions réelles les racines d'une équation quadratique [n° **19**].

Pour le cas de $n = 3$, *H. Thieme*[445]) est parvenu à une représentation des racines d'une équation du troisième ordre en rapportant projectivement une ponctuelle à un faisceau linéaire d'involutions tracées sur la même droite[446]); sa méthode est la même dans les trois

443) Progr. Stettin 1897.

444) Cf. III 3, n^{os} **25** et suiv.

445) Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 221, 276; Math. Ann. 28 (1887), p. 133.

446) *B. Klein* emploie dans le même but une correspondance trilinéaire symétrique entre points d'une conique [Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde, Habilitationsschrift, Marbourg 1881].

géométries de la droite, du plan ou de l'espace. Elle consiste à définir, dans l'espace par exemple, une surface d'ordre n par une polarité de même ordre, c'est-à-dire par une correspondance qui associe chaque point A à une surface α d'ordre $n-1$, avec la condition que la surface polaire de tout autre point B par rapport à cette surface α soit la même que celle de A par rapport à la surface β associée à B. Une pareille correspondance représente alors une surface d'ordre n, la polaire d'un point quelconque A par rapport à cette surface étant la surface α associée à ce point A.* La méthode s'applique d'abord aux multiplicités du troisième ordre; elle peut ensuite s'étendre de proche en proche en passant de l'ordre n à l'ordre $n+1$. *E. Kötter*[447]) devait ensuite reprendre cette méthode avec plus de détails et sous une forme plus complète.

Pour ce qui concerne la recherche de notions équivalentes à celles de la théorie algébrique des invariants, il n'existe que quelques propositions limitées au domaine binaire; elles reposent sur cette conception que les formes binaires peuvent être envisagées a priori comme correspondant aux transformations homographiques ou involutives; on constate ensuite que les formules et calculs de la théorie des formes peuvent se développer parallèlement à l'étude des relations entre ces transformations: par exemple, si J_1 et J_2 désignent deux involutions et J l'involution harmonique à chacune d'elles [n° **23**], J correspond au déterminant fonctionnel des deux formes qui correspondent respectivement à J_1 et J_2[448]) [cf. III 3, n^os **25** et suiv.].

Les transformations homographiques prises pour objets d'opérations.

23. Le calcul des transformations homographiques. Toute correspondance homographique ou corrélative peut être envisagée comme une opération ayant pour effet de transformer une figure en une autre. Il était donc naturel, et c'est ce qui s'est fait depuis longtemps sous une forme plus ou moins consciente, d'étudier les transformations obtenues par des applications successives de ces diverses correspondances et de recourir, pour représenter ces opérations, à la notation usuelle employée dans la théorie des groupes[449]). Rappelons rapidement en

447) Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Kurven, Preisschrift publ. Abh. Akad. Berlin 1887, Phys.-math. Klasse, math. Abh. p. 1/303. Dans cet ouvrage *E. Kötter* reproduit également, en la modifiant légèrement, la théorie des imaginaires de *K. G. Chr. von Staudt*.

448) Cf. *H. Wiener*, Habilitationschrift, Halle 1885.

449) L'usage de cette notation, appliquée à l'étude des correspondances

quoi consiste cette notation. Si l'on désigne par V la correspondance homographique qui relie une figure Σ à une autre Σ', c'est-à-dire un point quelconque A de la première à un point A' de la seconde, puis par V' la correspondance homographique reliant Σ' à une troisième figure Σ'', c'est-à-dire le point A' au point A'', la correspondance qui relie les figures Σ et Σ'' est une nouvelle correspondance homographique V'', que l'on appelle le *produit* des deux premières, et l'on écrit les relations

$$\mathrm{V}'' = \mathrm{V}\mathrm{V}', \quad \Sigma\mathrm{V} = \Sigma', \quad \Sigma'\mathrm{V}' = \Sigma\mathrm{V}'' = \Sigma''.$$

Cette extension de l'idée de produit possède le caractère *associatif* de la multiplication, de sorte qu'on peut lui appliquer toutes les propriétés des opérations associatives et principalement la notion de *groupe*[450]). En particulier, il est manifeste que l'ensemble des transformations projectives qui n'altèrent pas une même figure forme un groupe.

Si V désigne l'opération qui transforme Σ en Σ', c'est-à-dire A en A', l'opération qui transforme Σ' en Σ, c'est-à-dire A' en A, est appelée la transformation *inverse* de V, et se représente par la notation V^{-1}; en particulier, la correspondance banale dans laquelle chaque élément de Σ se correspond à lui-même s'appelle la transformation *identique*. *Une transformation qui se confond avec son inverse, c'est-à-dire dont le carré est la transformation identique, est une *involution*.*

Enfin, une transformation projective U peut elle-même être prise comme l'objet d'une autre transformation projective V; la nouvelle transformation ainsi obtenue U' s'appelle la *transformée* de U par la transformation V et peut se représenter par le produit

$$\mathrm{U}' = \mathrm{V}^{-1}\mathrm{U}\mathrm{V}.$$

Dans le cas particulier où U' se confond avec U, autrement dit lorsque l'on a

$$\mathrm{U}\mathrm{V} = \mathrm{V}\mathrm{U},$$

les deux opérations U et V sont dites *échangeables*; dans le cas où U' se confond avec l'inverse de U, on dit que U est *inversée* par V.

Ces principes généraux rappelés, on doit à *C. Segre* une notion importante, celle de transformations *harmoniques*. *C. Segre* désigne

projectives, semble remonter à *C. Stephanos*, Bull. sc. math. (2) 7 (1883), p. 251; Math. Ann. 22 (1883), p. 299.

450) Pour ce qui concerne l'étude des groupes plus simples qui se rattachent à la théorie des configurations géométriques, ou à celle de certaines courbes et surfaces remarquables, voir les articles III 9 et III 16.

sous ce nom général deux transformations homographiques, U et V, satisfaisant à la relation

$$U^{-1}V = V^{-1}U,$$

ce qui revient à dire que chacun de ces deux produits constitue une transformation égale à son inverse ou, par suite, que c'est une involution J, ou enfin que l'on a

$$U = VJ \quad \text{ou} \quad V = UJ.$$

En particulier, deux involutions harmoniques sont aussi échangeables, et réciproquement; *une transformation homographique U et une involution J sont harmoniques lorsque U est inversée par J, et réciproquement.*

Dans le cas de transformations homographiques sur une droite, deux transformations U et V sont harmoniques lorsque tout point A de la droite peut être associé à un autre point B de façon que, si U transforme A en A_1 et B en B_1, V transforme A en B_1 et B en A_1.

Deux involutions sur une même droite sont harmoniques (ou par conséquent échangeables) lorsque les points doubles de l'une sont conjugués harmoniques par rapport aux points doubles de l'autre[451]), et dans ce cas seulement. Plus généralement, sur une même droite, une transformation homographique P et une involution J sont harmoniques, lorsque les points doubles de P forment un couple de l'involution J.

Sur une même droite également, deux transformations homographiques sont échangeables, lorsqu'elles ont les mêmes points doubles, ou qu'elles forment deux involutions harmoniques[452]).

Une autre notion importante est celle d'involution J *attachée* (*verbundene* ou *zugehörige*) à une transformation homographique P sur une droite. On a vu en effet [n° **13**] que si l'on désigne par A' et A_{-1} les transformés d'un point quelconque A dans les transformations P et P^{-1}, par A_1 le conjugué harmonique de A par rapport à A' et A_{-1}, A et A_1 se correspondent en involution: c'est cette correspondance qui constitue l'involution J *attachée* à P; elle est échangeable avec P.

Toutes ces diverses notions sur les transformations homographiques

451) De là le nom de transformations harmoniques.

452) *On verra au n° **24** comment *C. Segre* énonce ces diverses conditions sous une forme générale indépendante de la réalité des points doubles.*

prennent une forme extrêmement simple lorsque, avec *C. Segre*[453]), on effectue ces transformations sur les éléments d'une conique. Ainsi deux involutions sur une conique, J et J_1, sont harmoniques lorsque leurs centres ou, par conséquent leurs axes, sont conjugués par rapport à cette conique; de plus, le point d'intersection de ces deux axes est alors le centre d'une troisième involution $J_2 = JJ_1$, produit des deux premières. De même, une correspondance homographique P sur la conique correspond à une droite déterminée p, dite *droite de Pascal*, et P est harmonique à une involution J, lorsque cette droite de Pascal p est conjuguée de l'axe de l'involution J. Deux correspondances homographiques non involutives sont échangeables lorqu'elles ont la même droite de Pascal. Enfin l'involution attachée à la transformation homographique P admet pour axe la droite de Pascal de P.

Passons aux transformations homographiques du plan ou de l'espace. Dans ce cas, deux transformations non involutives ne sont échangeables que si elles ont les mêmes éléments doubles. S'il s'agit de deux homologies centrales, elles ne le sont que si le centre de chacune d'elles se trouve sur l'axe (ou dans le plan d'homologie) de l'autre. S'il s'agit de deux homologies involutives gauches, la condition est que leurs axes soient respectivement les côtés opposés d'un même quadrilatère gauche, ou qu'ils appartiennent à un même système de génératrices rectilignes d'une quadrique, les axes de l'une étant conjugués harmoniques des axes de l'autre[454]). Une homologie involutive gauche et une homologie centrale sont échangeables lorsque les deux axes de la première sont disposés de telle façon que l'un passe par le centre d'homologie, et que l'autre soit contenu dans le plan d'homologie de la seconde.

Une homologie, centrale ou gauche, et une transformation par polaires réciproques sont échangeables, lorsque cette seconde transformation admet comme éléments homologues le centre et le plan, ou les deux axes de la première[455]).

Une transformation corrélative par rapport à un complexe linéaire

453) J. reine angew. Math. 100 (1887), p. 329; voir aussi *F. Aschieri,* Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 22 (1889), p. 414, 484, 558, 624.

454) Voir, au sujet de cette proposition et des suivantes, *D. Montesano,* Ann. mat. pura appl. (2) 14 (1886/7), p. 131. Voir également, *A. Sannia,* Lezioni di geometria proiettiva, Naples 1892; (2e éd.) Naples 1895, p. 444.

A une transformation homographique gauche est encore attachée une homologie involutive gauche [cf. *A. Sannia,* id. p. 496].

455) D'après cela, deux transformations par polaires réciproques sont échangeables lorsque l'une est le produit de l'autre par une homologie remplissant la condition énoncée.

(Nullcorrelation) ne peut s'échanger qu'avec une transformation de même nature, ou avec une involution gauche.

Enfin, la transformation homographique générale de l'espace et sa transformation corrélative ne sont échangeables que sous certaines conditions.

Th. Reye[456]) ramène la recherche des transformations homographiques et corrélatives qui sont échangeables ou harmoniques à la recherche des couples de transformations dont l'une est inversée par l'autre, ce qui repose sur cette remarque que, si U est inversée par V et par W, U est échangeable avec le produit VW.

Une transformation homographique d'un plan, dont les éléments doubles forment un triangle conjugué par rapport à une conique, est inversée par la transformation par polaires réciproques ayant cette conique pour directrice. La proposition analogue s'applique à l'espace.

Dans le plan une transformation corrélative R est inversée par toute homologie J dont l'axe est la polaire du centre par rapport à chacune des deux coniques que définit cette transformation corrélative, autrement dit par rapport à toute homologie qui transforme chacune de ces coniques en elle-même. La proposition analogue s'applique encore à l'espace. Plus généralement, la transformation R est inversée par toute transformation de la forme JR, où J désigne une homologie de la forme énoncée.

Parmi les divers problèmes auxquels conduit le calcul des transformations, il y a d'abord lieu de signaler celui qui consiste à décomposer une transformation donnée en un produit de transformations particulières, et principalement de perspectives, d'involutions ou d'homothéties[457]).

H. Wiener[458]) a étudié, à ce sujet, d'une part, la classe nombreuse des transformations qui peuvent se décomposer en un produit de deux involutions et, d'autre part, les groupes de transformations qui ne comprennent que des involutions. La première classe comprend principalement les transformations homographiques d'une droite, ainsi que les transformations homographiques de l'espace qui laissent invariante une conique ou une quadrique. Celles qui conservent une conique jouissent de cette propriété remarquable que l'on peut, par une transformation projective, les ramener aux transformations du groupe des mouvements et des retournements; elles constituent ainsi un exemple instructif de cette méthode générale, signalée au n° **22** sous le nom de spécialisation des problèmes.

Certains problèmes enfin prennent une forme particulièrement simple lorsqu'on emploie la notation du calcul des transformations. Telle est principalement l'étude des groupes cycliques, déjà signalée au n° **14**. Une transformation homographique quelconque P donne naissance à la suite illimitée de transformations homographiques

(1) $$1, \mathrm{P}, \mathrm{P}^2, \ldots, \mathrm{P}^\lambda, \ldots\ldots;$$

celles-ci font correspondre un point quelconque A à une suite illimitée de points

(2) $$A, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\lambda, \ldots\ldots$$

que l'on désigne, dans le cas général, par groupe *cyclique.* Les groupes cycliques de points correspondant à deux points quelconques A, B sont projectifs.

Dans le cas particulier où la suite de transformations (1) est périodique, il existe un entier minimé n pour lequel on a $\mathrm{P}^n = 1$, et le groupe cyclique (2) est alors appelé groupe cyclique *fini* d'ordre n. Dans un tel groupe, on a les relations projectives suivantes:

$$AA_1A_2 \ldots A_{n-1} \barwedge A_iA_{i+1} \ldots A_nA_1 \ldots A_{i-1}$$

et

$$A_1A_2 \ldots A_n \barwedge A_nA_{n-1} \ldots A_2A_1.$$

En outre, pour toute valeur donnée de i, les couples de points $A_{i-\lambda}$, $A_{i+\lambda}$ correspondant aux diverses valeurs de l'entier λ appartiennent à une même involution dont A_i est un point double[459]).

456) Geometrie der Lage, (3e éd.) 3, Leipzig 1892, p. 219; (4e éd.) 3, Leipzig 1910, p. 189; Math. Ann. 43 (1893), p. 145. Les propositions énoncées s'appliquent également, ainsi que le démontre *Th. Reye,* au cas de transformations corrélatives pour lesquelles les coniques ou quadriques directrices seraient imaginaires. Elles s'étendent aussi à certaines transformations homographiques particulières et, en particulier, à celles qui conservent les deux systèmes de génératrices d'une quadrique.

457) Voir par ex. *A. del Re,* Rendic. Accad. Napoli (2) 2 (1888), p. 423; Rend. Circ. mat. Palermo 2 (1888), p. 37, 128; Giorn. mat. (1) 28 (1890), p. 257; Rivista mat. 2 (1892), p. 99; *F. Deruyts,* Mém. Soc. sc. Liége (2) 17 (1892), mém. n° 3; *M. Bôcher,* Math. Ann. 43 (1893), p. 598.

On a rencontré au n° 8 un cas particulier de ce problème, celui où il s'agit de décomposer une transformation homographique en un produit de perspectives seulement; voir note 148.

458) Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 245; 43 (1891), math. p. 424, 644; 45 (1893), math. p. 555.

459) Ces diverses propriétés sont signalées, en particulier, par *C. Stephanos,* Bull. sc. math. (2) 7 (1883), p. 204; Math. Ann. 22 (1883), p. 299; *H. Wiener,* Habilitationsschrift, Halle 1885; *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 98 IIa (1889), p. 290; Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 371; *A. Ameseder* ramène la question à l'étude des rotations.

D'ailleurs, une projectivité cyclique peut se ramener, par une transformation homographique, à une rotation périodique, et alors toutes ces propriétés deviennent immédiates.

24. Faisceaux et réseaux de correspondances homographiques ou corrélatives. Le fait capital qui domine toute la théorie des faisceaux et réseaux de transformations homographiques, corrélatives ou involutives est le caractère de *multiplicité linéaire* des divers ensembles formés par ces transformations.

Et d'abord, un premier point résulte immédiatement des propositions fondamentales: c'est l'ordre de multiplicité de ces divers ensembles. Envisageons, par exemple, l'ensemble des projectivités sur une droite: il constitue une multiplicité linéaire du troisième ordre, chacune de ces projectivités étant définie par trois couples de points homologues; de même, l'ensemble des involutions sur une droite forme une multiplicité du second ordre[460]).

Puis, dans le plan, l'ensemble des collinéations forme une multiplicité du huitième ordre, chacune d'elles étant définie par quatre couples de points homologues; il en est de même pour l'ensemble des corrélations. Si l'on envisage ensuite certaines transformations particulières, on obtient, pour les mêmes raisons, une multiplicité du quatrième ordre pour l'ensemble des homologies, et une autre du cinquième ordre pour l'ensemble des corrélations involutives.

Dans l'espace enfin, l'ensemble des collinéations constitue une multiplicité du quinzième ordre; il en est de même pour les corrélations; pour les homologies centrales, l'ensemble est du sixième ordre; il est du huitième pour les homologies axiales et du neuvième pour les corrélations involutives.

Le caractère linéaire de ces diverses multiplicités se reconnaît immédiatement par les méthodes analytiques. Mais, en géométrie projective, il faut recourir pour l'établir à des considérations plus étendues, et principalement, il faut d'abord définir sur des bases purement géométriques ce que l'on entend par caractère linéaire. Il y a là un sujet de recherches qui n'a d'abord été abordé que pour les transformations homographiques sur une droite.

Le cas de beaucoup le plus simple est celui du *faisceau d'homographies* constitué par l'ensemble de toutes les transformations homographiques sur une même droite qui admettent un même système de points doubles réels. Le fait essentiel qui donne à ce faisceau le

460) Il en résulte que l'ensemble des projectivités harmoniques à une projectivité donnée forme aussi une multiplicité du second ordre.

caractère linéaire est que, si M et N sont les deux points doubles d'une telle transformation, le rapport anharmonique

$$(MNAA')$$

garde une même valeur λ, quels que soient les deux points homologues, A et A', de cette transformation [n° **11**]. Partant de là, si on laisse fixe le point A, chaque transformation du faisceau correspond à une position déterminée du point A', et réciproquement; or ce point A' peut parcourir toute la droite: c'est là une première forme du caractère linéaire du faisceau. Une seconde forme de ce caractère est que chaque transformation du faisceau correspond à une valeur du nombre λ, et réciproquement, ce nombre pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

Un second faisceau de projectivités sur une droite est constitué par celles que l'on peut construire, en partant d'une projectivité déterminée P, et appliquant la proposition connue de *M. Pasch*[298]) [n° **13**], laquelle permet, pour chaque valeur du nombre λ, de construire une autre projectivité Q_λ. Cette proposition est complétée par une autre, d'après laquelle les points A_λ et B_λ, homologues de deux points fixes A et B dans les diverses transformations Q_λ, décrivent eux-mêmes, lorsque λ varie, deux divisions homographiques. Partant de là, on peut prendre pour définition du rapport anharmonique de quatre transformations Q_λ celui des quatre points A_λ, de sorte que ces transformations Q_λ forment bien un faisceau linéaire.

Ce résultat est fondamental dans la théorie des faisceaux linéaires, *car on peut le généraliser immédiatement en multipliant toutes les transformations Q_λ par une même projectivité U, d'ailleurs quelconque; et l'ensemble des transformations Q_λU forme à nouveau, pour la même raison que le précédent, un faisceau linéaire.* De là résultent encore les propriétés suivantes: tout faisceau de cette nature est complètement déterminé lorsqu'on en connaît deux transformations distinctes P_1 et P_2; lorsque les points doubles de ces deux transformations P_1 et P_2 sont tous réels, ceux de toute autre transformation du même faisceau forment avec les précédents une involution[461]).

H. Wiener[462]) et *C. Segre*[463]) ont repris ces diverses propositions

461) Ces propositions ont été données par *C. Stephanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 299. On en a déjà rencontré un cas particulier au n° **23**, à propos des projectivités harmoniques à une involution déterminée.

Voir, à ce sujet, *C. Hossfeld*, Diss. Iéna 1882.

462) Habilitationsschrift, Halle 1885.

463) J. reine angew. Math. 100 (1887), p. 317. Les considérations de *C. Segre* s'étendent aussi aux antiprojectivités.

et établi l'existence des faisceaux linéaires de projectivités, ainsi que leurs propriétés capitales, par des considérations purement géométriques et sans faire intervenir la notion de rapport anharmonique, ni celle d'éléments imaginaires.

D'abord, *H. Wiener* envisage seulement des faisceaux d'involutions; un faisceau d'involutions est constitué par l'ensemble de celles qui sont échangeables avec une involution déterminée ou, ce qui revient au même, qui lui sont harmoniques.

Les travaux de *C. Segre*, sur lesquels il y a lieu de s'arrêter plus longuement, reposent sur deux idées essentielles; la première est que l'on peut substituer à la notion de points doubles d'une projectivité, celle [n° **23**] d'involution *attachée* à cette projectivité, l'un des avantages de cette notion nouvelle étant de n'établir aucune distinction entre éléments réels et éléments imaginaires; la seconde consiste à caractériser tout faisceau de projectivités par une involution unique, qui est harmonique à toutes les transformations du faisceau.

C. Segre constate d'abord que, si J est l'involution attachée à une projectivité P, J est échangeable avec P; et c'est la seule lorsque P n'est pas elle-même une involution [n° **23**]. Cela posé, toute projectivité P_λ peut être complètement définie par l'involution J qui lui est attachée et par un couple AA_λ de points homologues: si en effet, A' et A_λ' sont respectivement les homologues de ces deux points dans l'involution J, et si $A_{-\lambda}$ est le conjugué harmonique de A_λ par rapport à A et A', on connaît trois couples de points homologues dans P_λ, savoir AA_λ, $A'A_\lambda'$ et $A_{-\lambda}A$. Dans ces conditions, l'ensemble des projectivités échangeables avec une involution déterminée J forme bien un faisceau linéaire[464]), puisque, d'après leur définition, il y a une correspondance biunivoque entre ces projectivités et les points A_λ d'une ponctuelle. On peut aussi le montrer en constatant que si B_λ désigne l'homologue d'un autre point fixe B dans la transformation P_λ, les points A_λ et B_λ forment deux ponctuelles projectives.

Pour passer ensuite de la considération de ce faisceau particulier à la définition générale d'un faisceau, *C. Segre* raisonne de la façon suivante. D'abord on constate que, étant données deux projectivités quelconques P et Q, il existe toujours deux involutions J et J′, et deux seulement, telles que J se transforme en J′ dans chacune des projectivités P et Q. Inversement, étant données deux involutions J et J′, il y a lieu de chercher toutes les projectivités qui transforment J en J′. On trouve que celles-ci se répartissent entre deux systèmes P_λ et Q_λ. Si deux de ces projectivités, P_λ et P_μ, appartiennent au même système, J est l'involution attachée au produit $P_\lambda P_\mu^{-1}$; au contraire, si deux de ces projectivités, P_λ et Q_μ, appartiennent à deux systèmes différents, elles sont harmoniques, et le produit $P_\lambda Q_\mu^{-1}$ représente une involution harmonique à J. Chacun de ces deux systèmes constitue alors un faisceau linéaire *que l'on peut considérer comme formé en partant du faisceau particulier étudié plus haut et en multipliant toutes les transformations de celui-ci par une même projectivité.* On dit en outre que les deux faisceaux que l'on vient d'obtenir sont deux faisceaux harmoniques. Chacun d'eux comprend, en général, une involution et une seule.

En outre, un faisceau quelconque est complètement défini lorsqu'on connaît deux de ses transformations P et Q, ces deux transformations définissant les involutions J et J′. On construit ce faisceau en construisant d'abord l'involution J, attachée au produit PQ^{-1}, puis le faisceau de projectivités P_λ' auxquelles J est attachée, et enfin, en multipliant toutes celles-ci par Q. D'autre part, l'ensemble des projectivités harmoniques aux deux transformations données P et Q forme également un second faisceau qui est harmonique au premier.

La théorie des faisceaux linéaires étant ainsi édifiée, on peut établir alors le caractère linéaire des réseaux de projectivités et, plus généralement encore, de la multiplicité à trois dimensions formée par l'ensemble de toutes les projectivités sur une droite. C'est ce qui résulte de ce fait que deux projectivités P et Q définissent deux faisceaux, l'un qui les comprend toutes deux, l'autre qui est harmonique au premier.

En effet, si l'on se donne trois projectivités quelconques P, Q, R, il en existe une et une seule qui leur soit harmonique; pour l'obtenir, il suffit de construire successivement l'involution J_1 attachée au produit QP^{-1}, l'involution J_2 attachée à RP^{-1}, l'involution J harmonique à la fois à J_1 et J_2; le produit JP est la transformation cherchée. Inversement, si l'on envisage ensuite toutes les projectivités harmoniques à cette dernière, elles forment un ensemble qui est complètement défini par les trois projectivités données P, Q, R; et cet ensemble constitue une multiplicité à deux dimensions dont le caractère linéaire se manifeste par une correspondance entre les projectivités de l'ensemble et les points d'un plan.

De là, on aboutit enfin au caractère linéaire de l'ensemble de

464) Ce faisceau n'est autre que celui des projectivités ayant les mêmes points doubles; dans le cas particulier où ces derniers sont imaginaires, on peut, par une projection, l'amener à se confondre avec le faisceau des rotations de l'espace autour d'une droite fixe.

toutes les projectivités; il s'établit par une correspondance entre les projectivités sur une même droite et les points de l'espace ordinaire. C'est ce qui a été fait, à l'aide de procédés géométriques, par *F. Aschieri*[465]), et ce qui avait été fait précédemment, mais par une méthode analytique qui consiste à représenter une relation bilinéaire entre deux variables par un point de l'espace, par *C. Stephanos*[466]). Dans cette correspondance, toute projectivité P est représentée par un point P; un rôle important est joué par les projectivités singulières ou évanouissantes, lesquelles sont représentées par les divers points d'une quadrique réglée non évanouissante F; par exemple, les projectivités harmoniques à une même projectivité P sont représentées par tous les points d'un même plan, lequel est le plan polaire par rapport à F du point P, qui représente la projectivité P[467]).

La théorie des faisceaux ou réseaux de collinéations du plan ou de l'espace est bien moins avancée. On ne peut citer que de rares travaux qui soient développés dans le même esprit que les précédents. C'est ainsi que *A. Ameseder*[468]) a étudié principalement les homographies biaxiales et, parmi celles-ci, celles qui conservent une quadrique déterminée F; dans cette étude, il a été également conduit à distinguer, parmi les transformations qu'il étudie, celles qui sont involutives, et à leur faire jouer un rôle prépondérant.

On a aussi envisagé les multiplicités formées par des collinéations ou corrélations particulières. Dans cet ordre d'idées, après quelques recherches[469]) portant sur des points très spéciaux, il y a tout d'abord lieu de citer, à cause de leur portée, les travaux de *S. Kantor*[470]).

465) Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 22 (1889), p. 558, 624.

466) Math. Ann. 22 (1883), p. 299.

467) On trouvera dans *B. Klein* [Sitzgsb. Ges. Naturw. Marburg 1888, p. 1] une autre définition des faisceaux et réseaux de projectivités, basée sur la considération de transformations perspectives.

La multiplicité à deux dimensions formée par l'ensemble de toutes les involutions, et son caractère linéaire, ont été étudiés, sous une forme géométrique, par *E. Kötter* [Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Kurven, Preisschrift publ. Abh. Akad. Berlin 1887, Phys. math. Klasse, math. Abh. p. 110 et suiv.] et sous une forme analytique, par *F. Deruyts,* Mém. Soc. sc. Liége (2) 17 (1892), p. 3.

468) Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 371

469) *L. Certo* [Giorn. mat. (1) 20 (1882), p. 321] a étudié le système des affinités dans le plan, *F. Amodeo* [Giorn. mat. (1) 27 (1889), p. 40] a étudié les multiplicités à une dimension formées de perspectives planes, et *A. del Re* [Giorn. mat. (1) 28 (1890), p. 257] a envisagé certaines multiplicités à une dimension formées de transformations par polaires réciproques.

470) Denkschr. Akad. Wien (math.) 46 II (1883), p. 83. Certaines propositions de *S. Kantor* sont retrouvées par *A. del Re* [Rend. Circ. mat. Palermo 2 (1888), p. 128]. Cf. *R. Sturm,* Math. Ann. 19 (1882), p. 461. *Extension à l'hyperespace par *M. Stuyvaert,* Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 44 (1911), p. 314/30.*

Ils concernent la multiplicité à deux dimensions formée par l'ensemble des collinéations du plan qui admettent trois couples de points homologues déterminés, et la multiplicité analogue à trois dimensions formée par l'ensemble des collinéations de l'espace qui admettent quatre couples de points homologues déterminés. Le but essentiel de ces travaux est, d'une part, de rechercher les correspondances ponctuelles d'ordre supérieur qui se rattachent à ces transformations, d'autre part, de déterminer celles de ces transformations qui satisfont à certaines conditions données et, en particulier, celles qui sont évanouissantes.

Le même point de vue domine dans certaines recherches sur des systèmes de corrélations. Jusqu'ici, on a principalement étudié les systèmes de corrélations planes qui admettent soit sept, soit cinq couples de points conjugués donnés [voir n° **15**], ces systèmes formant une multiplicité à une dimension dans le premier cas, à trois dimensions dans le second cas; mais ces recherches reposent plutôt soit sur des méthodes analytiques, soit sur celles de la géométrie énumérative, soit enfin sur la théorie des *connexes* [voir l'article III 28].

La première étude, celle des faisceaux de corrélations, se confond, dans ses points essentiels, avec celle des correspondances quadratiques, dont il sera question plus loin [n° **26**].

En ce qui concerne la seconde étude, celle de la multiplicité de corrélations admettant cinq couples de points conjugués donnés, rappelons seulement cette proposition de *A. Clebsch*[471]), déjà citée [n° **8**], d'après laquelle ces cinq couples en déterminent linéairement un sixième qui appartient encore à toutes ces corrélations: ce sixième couple est également celui que *R. Sturm,* dans le problème de la projectivité pour le cas de $n = 5$, appelle le couple relié à cinq couples donnés [n° **16**]. La signification intéressante de ces six couples de points consiste en ce fait, signalé par *R. Sturm*[472]), que toute multiplicité linéaire à trois dimensions de collinéations planes comprend six transformations homologiques, et que les six couples de centres et axes de ces homologies constituent, pour le faisceau de collinéations, les six couples de points et droites conjugués qui correspondent aux six couples de points conjugués du faisceau de corrélations[473]).

471) Math. Ann. 6 (1873), p. 203.

472) Math. Ann. 22 (1883), p. 569. Dans son travail, *R. Sturm* traite aussi le cas général des corrélations assujetties à cinq conditions simples quelconques.

473) En ce qui concerne les groupes de transformations homographiques, voir l'article III 28.

Enfin, *Th. Reye*[474]) a exposé complètement la théorie générale des multiplicités formées par l'ensemble de toutes les transformations homographiques de la droite, du plan ou de l'espace; il a discuté l'ordre et la nature de ces diverses multiplicités et des multiplicités particulières qu'elles renferment. En particulier, il y a lieu de signaler, dans ces recherches, un mode de représentation, dans l'espace ordinaire à trois dimensions, d'un espace à un nombre quelconque de dimensions [voir, à ce sujet, l'article III 26].

Les généralisations des correspondances projectives.

25. L'homographie trilinéaire entre figures de rang un. La correspondance homographique trilinéaire entre trois figures fondamentales de rang un (trilineare einstufige Beziehung) s'exprime analytiquement[475]) par une seule relation, linéaire par rapport à chacune des trois coordonnées qui fixe la position d'un élément quelconque de chacune des trois figures. Chaque élément de l'une quelconque de ces figures correspond donc, d'une manière unique, à un système de deux autres éléments choisis arbitrairement dans chacune des deux autres figures.

Le système de trois éléments, choisis ainsi respectivement dans chacune des trois figures, constitue ce que l'on appelle un *terne* (Tripel); et l'ensemble de tous les éléments associés dans la correspondance forme ce que l'on appelle un *champ de ternes* (Tripelfeld).

L'expression d'*homographie trilinéaire* est due à *G. Castelnuovo* qui a employé aussi celle d'*homographie de seconde espèce*; *C. Le Paige* désigne cette correspondance sous le nom de *homographie du troisième ordre et du second rang*, l'ordre indiquant le nombre de figures fondamentales reliées par la correspondance, et le rang le nombre d'arbitraires dont dépend un groupe d'éléments associés dans cette correspondance.*

Cette correspondance a été signalée, pour la première fois, par *F. August*[476]), qui l'a fait intervenir dans un mode de génération des surfaces du troisième ordre [n° **10**]; il choisit comme figures fondamentales trois faisceaux de plans, et forme un terne en associant les trois plans de ces faisceaux qui projettent un même point d'un plan fixe donné.

Une étude géométrique plus approfondie de la correspondance homographique trilinéaire a été ensuite entreprise par *H. Schubert*[477]), qui, comme procédé le plus simple pour engendrer cette correspondance, choisit trois ponctuelles quelconques g, g', g'' et forme un terne avec les trois points où leurs bases sont coupées par un plan variable issu d'un point fixe S; ainsi apparaît immédiatement que, si on laisse fixe un point M de l'une de ces ponctuelles, les points M' et M'' qui lui sont associés dans les deux autres ponctuelles sont en correspondance projective. Un cas particulier remarquable signalé par *H. Schubert* est celui de trois ponctuelles g, g', g'' placées dans un même plan, dont les points associés M, M', M'' sont assujettis à la seule condition d'être en ligne droite; on dit alors que la correspondance trilinéaire est *alignée* (geradlinig); et ce cas remarquable joue, dans la question qui nous occupe, le même rôle que celui des ponctuelles perspectives dans l'étude générale des ponctuelles homographiques.

La même étude a été reprise et complétée, plus récemment, à un point de vue mi-partie géométrique, mi-partie analytique, par *F. London*[478]).

Les propriétés capitales de la correspondance homographique trilinéaire sont les suivantes. Nous les énoncerons en nous plaçant seulement dans le cas où la correspondance est établie entre trois ponctuelles g, g', g''.

1°) Il existe sur chacune des trois droites *deux points singuliers*, S et T sur g, S' et T' sur g', S'' et T'' sur g'', et ces points se groupent par paires de six manières différentes, chaque paire étant formée de deux points appartenant à deux bases différentes et représentés par deux lettres différentes; le caractère essentiel de ces points singuliers est que le point de la troisième base qui doit former un terne de la correspondance avec les deux points singuliers d'une même paire reste complètement indéterminé sur cette troisième base.

Si les deux points singuliers d'une même base sont confondus, il en est de même des deux autres points singuliers de chacune des deux autres bases. Le champ de ternes est alors appelé *singulier*.

Lorsque la correspondance est établie entre éléments réels seulement, les points singuliers peuvent être réels ou imaginaires; mais, dans tous les cas, ils sont tous de même nature, tous réels ou tous imaginaires.

474) J. reine angew. Math. 104 (1889), p. 211; 106 (1890), p. 30, 315; 107 (1891), p. 162; 108 (1891), p. 89. Cf. *K. Zindler*, id. 111 (1893), p. 303.

475) Une discussion analytique approfondie de cette correspondance a été faite par *C. Le Paige* [Mém. couronnés et savants étrangers Acad. Belgique in 4°, 42 (1879), mém. n° 4 (mém. sur quelques applications des formes algébriques à la géométrie)], par *F. Folie* et *C. Le Paige* [Mém. Acad. Belgique 43 (1882), mém. n° 7; 45 (1884), mém. n° 1]; voir aussi *C. Le Paige*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 2; Bull. Acad. Belgique (3) 5 (1883), p. 25, 85.

476) Diss. Berlin 1862.

477) Math. Ann. 17 (1880), p. 457. *H. Schubert* envisage également, dans son étude, les cas de dégénérescence de la correspondance trilinéaire.

478) Math. Ann. 44 (1894), p. 375.

2°) Le produit des trois rapports anharmoniques formés, chacun sur une des trois bases, par les deux points singuliers de cette base et les points appartenant à deux ternes de la correspondance, est toujours égal à *un*[479]).

3°) La correspondance trilinéaire entre trois droites d'un même plan est alignée dès que les points singuliers sont tous placés aux sommets du triangle formé par ces trois droites, et que les points d'un seul terne de la correspondance sont eux-mêmes alignés.

4°) Si h, h', h'' sont trois ponctuelles, respectivement en correspondance homographique avec trois autres ponctuelles g, g', g'', les trois premières seront encore en correspondance trilinéaire dès que g, g', g'' le seront.

Ces deux dernières propositions permettent de ramener, d'une façon simple, les propriétés générales de la correspondance trilinéaire générale à celles de la correspondance trilinéaire alignée; elles donnent, par exemple, le moyen de construire un nouveau terne d'une correspondance dont on connaît les points singuliers et un premier terne. On peut, dans cette construction, remplacer une paire de points singuliers par deux ternes: il en résulte que toute correspondance trilinéaire est complètement définie lorqu'on en connaît sept ternes, et qu'un huitième terne quelconque peut alors être construit à l'aide de la règle seulement[480]).

5°) Les points M' et M'' des droites g' et g'' qui forment un terne de la correspondance avec un même point fixe M de la droite g sont en correspondance homographique; par suite, ainsi que l'a fait observer *F. London*, la correspondance trilinéaire peut être envisagée comme formée par un faisceau de projectivités entre les ponctuelles g' et g'', les projectivités de ce faisceau étant elles-mêmes rapportées projectivement aux points de la ponctuelle g.

Dans ces conditions, les éléments singuliers de g sont les points pour lesquels la projectivité correspondante est évanouissante. Lorsque ces éléments se confondent, il en est de même, avons-nous vu, pour

479) Ces deux premières propriétés sont déjà mentionnées par *F. August*, Diss. Berlin 1862.

480) Cette construction est signalée, par exemple, par *C. Le Paige* [Bull. Acad. Belgique (3) 5 (1883), p. 25, 85]. Dans ce mémoire, l'auteur partage les correspondances trilinéaires en plusieurs classes, en rattachant chacune d'elles à une surface du troisième ordre qui, suivant la classe, est indécomposable, ou se décompose en un plan et une quadrique indécomposable, ou enfin se réduit à trois plans.

F. London [Math. Ann. 44 (1894), p. 375] donne également la même construction.

les éléments singuliers des autres bases; de plus, la correspondance alignée à laquelle peut se ramener la correspondance trilinéaire, comme il a été dit au 4°), est alors formée avec trois droites concourantes.

6°) Toute correspondance homographique trilinéaire comprend des ternes formant ce que *F. London* appelle une *suite unicursale de ternes* (unikursale Tripelreihe), en entendant par là les éléments de trois ponctuelles, homographiques deux à deux, placées respectivement sur les trois droites g, g', g''. Ces suites unicursales se répartissent en deux réseaux. Chaque suite de l'un quelconque de ces réseaux dépend de deux arbitraires; elle est complètement définie lorsqu'on en connaît deux ternes. Deux suites appartenant à un même réseau ont un terne commun; deux suites appartenant à deux réseaux différents en ont deux.

Dans le cas où la correspondance trilinéaire est alignée, l'un des réseaux correspond aux ponctuelles homographiques tracées sur les bases g, g', g'' par les tangentes à une conique quelconque inscrite dans le triangle formé par g, g', g''; le second réseau correspond aux ponctuelles tracées par les droites issues d'un point fixe quelconque.

G. Castelnuovo[481]) a étudié la correspondance trilinéaire entre trois séries de points appartenant tous à une même cubique gauche; il engendre cette correspondance en choisissant trois cordes fixes mais arbitraires a, b, c de la cubique, et en projetant sur la cubique elle-même, de ces trois cordes prises pour axes de projection, un même point P d'un plan π, ce qui donne les trois points P_a, P_b, P_c, formant un terne quelconque de la correspondance; et inversement, toute correspondance trilinéaire sur la cubique peut être engendrée de cette manière, l'une des trois cordes a, b, c pouvant même être choisie arbitrairement.

G. Castelnuovo donne en outre des constructions relatives à cette correspondance trilinéaire sur une cubique gauche, dans les trois cas où l'on donne soit un terne et six éléments singuliers, soit trois ternes et quatre éléments singuliers, soit cinq ternes et deux éléments singuliers.

Il envisage enfin les ensembles de ternes, dont chacun dépend d'une arbitraire, qui correspondent aux cas où le point P décrit une droite ou une conique du plan π, et établit à ce sujet une série de propositions intéressantes.

481) Atti Ist. Veneto (6) 5 (1886/7), p. 1041. Voir aussi, *F. Aschieri* [Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 23 (1890), p. 312] et *F. Deruyts* [Bull. Acad. Belgique (3) 17 (1889), p. 312/29.

G. Hauck[482]) a étudié les relations métriques qui se présentent dans une correspondance homographique trilinéaire. Il engendre cette correspondance en projetant un même point d'un plan sur trois droites de ce plan, de trois points de vue pris également dans ce plan. Il met ainsi en évidence sur chaque droite, sur g par exemple, un point P, qu'il appelle *point de fuite* de cette droite, lequel forme un terne avec les points à l'infini P'_∞ et P''_∞ des deux autres droites g' et g''. Les trois points de fuite P, P', P'' et les points singuliers S et T, S' et T', S'' et T'' sont liés par les relations

$$SP : PT = S'P' : P'T' = S''P'' : P''T'',$$

et *G. Hauck* désigne sous le nom de *caractéristique* de la correspondance la valeur commune de ces trois rapports. La correspondance est complètement définie par ses six points singuliers et la valeur de sa caractéristique. Certaines valeurs particulières de cette caractéristique correspondent à des cas remarquables que *G. Hauck* met en évidence.

On peut envisager simultanément, sur les mêmes séries d'éléments, deux correspondances homographiques trilinéaires. Les travaux de *F. London* montrent que ces deux correspondances en définissent une infinité formant un faisceau, et qu'il existe une infinité de ternes communs à toutes ces correspondances, chacun de ces ternes dépendant d'une arbitraire. Par opposition à ce qu'il désigne, comme on l'a vu plus haut, sous le nom de suite unicursale de ternes, *F. London*[483]) dit que les ternes communs à toutes ces correspondances forment une *suite bicursale*, pour cette raison que chaque élément d'une des trois bases fait partie de deux ternes de la suite, alors qu'il ne fait partie que d'un seul terne d'une suite unicursale; **C. Le Paige* dit „une homographie du troisième ordre et du premier rang"*.

De la même façon, on peut envisager simultanément trois champs de ternes, lesquels définissent un réseau de correspondances trilinéaires. Dans un réseau, il existe six ternes communs à toutes les correspondances du réseau, et ces six ternes dépendent les uns des autres, de telle façon que la connaissance de cinq d'entre eux permet de construire le sixième à l'aide de la règle seulement[484]).

482) J. reine angew. Math. 108 (1891), p. 25. *G. Hauck* envisage aussi une correspondance homographique trilinéaire entre figures fondamentales de rang deux; voir à ce sujet l'article III 10.

483) Math. Ann. 44 (1894), p. 378.

484) Cf. *F. London*, Math. Ann. 45 (1894), p. 545. *F. London* ramène à ce problème la construction du neuvième point d'intersection de deux cubiques planes dont on donne les huit premiers points d'intersection, ainsi que celle du huitième point commun à trois quadriques dont on connaît sept points communs.

F. London a fait en outre l'étude des correspondances trilinéaires évanouissantes et mis en évidence leurs propriétés exceptionnelles.

Enfin, *H. Schubert*[485]) a traité le problème de la projectivité relativement aux correspondances homographiques trilinéaires.

On peut concevoir des correspondances trilinéaires entre éléments d'une même figure. C'est ce qui a été fait, comme on l'a vu plus haut, par *G. Castelnuovo*, qui envisage trois séries de points appartenant à une même cubique gauche. *B. Klein*[486]) étudie le cas où deux des trois figures seulement, g' et g'', se confondent; chaque point A de g correspond ainsi à une correspondance homographique entre deux ponctuelles superposées et aux points doubles de cette homographie; il réalise ainsi le type le plus général de la correspondance (1, 2) entre un point A d'une droite g et un point A' d'une autre droite g'.

B. Klein imagine ensuite que les trois séries se confondent; prenant alors pour leur support commun une conique, il obtient une correspondance involutive dont la représentation la plus simple est constituée par les trois sommets d'un triangle variable circonscrit à une autre conique; il l'appelle correspondance *trilinéaire symétrique* (trilinear symmetrisch) et l'applique à des problèmes du troisième ordre[487]).

*On doit à *C. Le Paige*[488]) et *Em. Weyr*[488a]) un essai de généralisation d'une correspondance trilinéaire; ils envisagent, à un point de vue analytique d'ailleurs, des homographies d'ordre et de rang quelconques. *Em. Weyr* considère principalement le cas où ces homographies deviennent involutives.*

26. Les correspondances quadratiques les plus simples. On rencontre un premier exemple[489]) de correspondance quadratique, établi

485) Progr. Hambourg 1882.

486) Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde, Habilitationsschrift, Marbourg 1881.

487) Voir *B. Klein*[486]) et Ann. mat pura appl. (2) 18 (1890), p. 213.

488) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 2.

488a) Id. (2) 10 (1883), mém. n° 3.

489) On en trouve d'autres exemples, établis par des méthodes analytiques, dans les travaux de *J. Plücker* [J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 28; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 148] et ceux de *L. I. Magnus* [J. reine angew. Math. 8 (1832), p. 51]. *Le premier est amené, par la considération d'un système de coordonnées trilinéaires, à associer une droite à une conique circonscrite à un triangle; il en déduit un mode de transformation des figures.* Le second se propose de trouver la correspondance ponctuelle biunivoque la plus générale et, admettant par erreur que la condition d'être biunivoque se traduit par des relations bilinéaires entre coordonnées, il obtient ainsi, comme unique solution, une correspondance quadratique.

par des considérations purement géométriques, dans les travaux de *J. Steiner*[490]). Il consiste à faire correspondre entre eux les points de deux plans π et π' par la condition que la droite qui joint deux points homologues P et P' s'appuie sur deux droites directrices fixes.

J. Steiner constate qu'il existe dans chacun des deux plans trois *points principaux* (ou *fondamentaux*), pour chacun desquels le point homologue de l'autre plan n'est plus déterminé et reste arbitraire sur une droite (*droite principale* ou *fondamentale*), puis qu'une droite quelconque d de l'un des deux plans se transforme en une conique circonscrite au triangle formé par les points principaux (*triangle principal*); plus généralement, qu'une courbe quelconque c, d'ordre n, se transforme, dans le cas général, en une courbe c' d'ordre $2n$ ayant un point multiple d'ordre n en chacun des points principaux, le degré de cette courbe c' s'abaissant de ν unités si la courbe c passe par un des points principaux en admettant ce point comme point multiple d'ordre ν.

J. Steiner constate également que tout faisceau de rayons ayant pour sommet un point principal correspond à un autre faisceau ayant encore un point principal pour sommet et que les rayons homologues de ces deux faisceaux sont en correspondance homographique, puis, plus généralement, qu'un faisceau de rayons ayant pour sommet un point quelconque se transforme en un faisceau de coniques auquel il est rapporté projectivement.

Ce même exemple de correspondance quadratique entre deux plans a été repris et étudié à nouveau par *A. Transon*[491]) qui l'appelle *projection gauche* ou *perspective quadratique*, et qui examine en particulier, sous le nom de *transformation gauche*, la transformation plane qui s'en déduit lorsqu'on amène les deux plans primitifs à coïncider en les faisant tourner autour de leur droite d'intersection.*

Dans cet exemple, la correspondance entre deux points homologues P et P' s'établit à l'aide d'une congruence linéaire, dont les deux directrices sont réelles et distinctes, la droite qui joint les deux points P et P' appartenant à cette congruence.

On peut envisager en outre, avec *E. Vessiot*[492]), le cas plus général où d'une part la congruence linéaire est quelconque, ses directrices étant réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, et où d'autre part, la droite d'intersection des deux plans rencontre ou ne rencontre pas l'une ou l'autre de ces directrices.

490) System. Entw.[108]), p. 251; Werke 1, p. 407.

491) Nouv. Ann. math. (2) 4 (1865), p. 385; (2) 5 (1866), p. 63.

492) Bull. Soc. math. France 22 (1894), p. 209.

La perspective quadratique de *A. Transon* étant ainsi généralisée, *E. Vessiot* montre que toute correspondance quadratique peut être réalisée par une perspective quadratique suivie d'une perspective linéaire.

Une seconde manière de construire géométriquement une correspondance quadratique a été donnée par *F. Seydewitz*[493]). Dans chacun des deux plans π et π', il envisage deux faisceaux de rayons de sommets S et T dans le plan π, S' et T' dans le plan π'; il rapporte projectivement le faisceau S au faisceau S', le faisceau T au faisceau T'; la correspondance entre deux points P et P' des deux plans s'établit alors par la condition que les rayons SP, TP soient respectivement les homologues des rayons $S'P'$, $T'P'$.

F. Seydewitz établit de cette façon que la correspondance est complètement définie par les points principaux et un couple de points homologues[494]). Puis, envisageant surtout des formes particulières de cette correspondance, considérée comme méthode de transformation des figures, il en fait de très nombreuses applications; il utilise par exemple la correspondance particulière dans laquelle les faisceaux S et T sont respectivement égaux à leurs faisceaux homographiques S' et T', auquel cas la droite de l'infini de chacun des deux plans se transforme alors en un cercle; il étudie de même les correspondances dans lesquelles plusieurs points principaux d'un même plan se confondent.

Une troisième manière d'arriver à une correspondance quadratique consiste à établir deux correspondances corrélatives entre un premier plan π d'une part et deux plans superposés π', π'' d'autre part; cela étant, la relation qui existe entre un point P du plan π et le point P', intersection des deux droites p', p'' qui correspondent à P dans ces deux corrélations, est une correspondance quadratique.

Ce procédé, signalé d'abord par *A. Jacobi*[495]), a été ensuite développé avec plus de détails par *G. Battaglini*[496]), puis par *Th. Reye*[497]).

493) Archiv Math. Phys. (1) 7 (1846), p. 113; (1) 8 (1846), p. 1. Dans le cas particulier où le rayon commun aux deux faisceaux S et T correspond dans chacune des deux projectivités au rayon commun aux deux faisceaux S' et T', on retombe sur le cas d'une correspondance homographique entre les deux plans [n° 8].

G. Bauer [J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 293] a aussi recours à cette définition d'une correspondance quadratique, et il en fait un principe fécond de transformation des figures.

494) Voir aussi, *T. A. Hirst*, Nouv. Ann. math. (2) 5 (1866), p. 213.

495) J. reine angew. Math. 23 (1842), p. 243; 31 (1846), p. 76.

496) Giorn. mat. (1) 1 (1863), p. 321.

497) Z. Math. Phys. 11 (1866), p. 280. Voir aussi *A. Voss* [id. 17 (1872),

On en déduit, en particulier, la conséquence suivante: comme une transformation corrélative est définie par huit couples de points conjugués, une correspondance quadratique est, à son tour, définie par sept couples de points homologues[498]), ces sept couples déterminant un faisceau de corrélations qui les admettent tous comme couples de points conjugués.

La théorie des faisceaux de corrélations est ainsi étroitement liée à celle des correspondances quadratiques. Par exemple, le faisceau de corrélations qui vient d'être défini comprend trois corrélations dégénérées; les points singuliers de celles-ci sont précisément les points principaux de la correspondance quadratique[499]).

De ce procédé pour engendrer une correspondance quadratique, *Th. Reye*[500]) en a déduit un autre qui consiste à projeter une quadrique sur deux plans quelconques π, π', de deux points S, S' pris sur cette quadrique: les points homologues P, P' de ces deux plans sont les projections d'un même point de la quadrique.

L'étude de deux plans superposés π, π', reliés par une correspondance quadratique, a fait l'objet de nombreuses recherches. En dehors du cas le plus intéressant, celui où la correspondance est involutive,

p. 375] et *A. Milinowski* [J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 140] qui, par un procédé analogue, rapportent projectivement un même plan π à deux plans confondus π', π'', et font correspondre soit un point P du plan π à la droite qui joint ses homologues des plans π', π'', soit une droite p du plan π au point d'intersection de ses homologues des plans π', π''. On obtient ainsi, entre points et droites, deux correspondances quadratiques que, par erreur, *A. Milinowski* regardait comme identiques. *Cette erreur est relevée par *R. Sturm* [Math. Ann. 19 (1882), p. 471].*

498) La construction d'une correspondance quadratique, définie par sept couples de points homologues, a été donnée par *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 224. Voir aussi, *F. London*, Math. Ann. 38 (1891), p. 334.

499) *T. A. Hirst* [Proc. London math. Soc. (1) 5 (1873/4), p. 40] établit ce résultat par les méthodes de la géométrie énumérative.

500) Z. Math. Phys. 11 (1866), p. 280. La génération indiquée par *Th. Reye* est réversible. Elle met en évidence le fait remarquable que voici: deux gerbes étant en correspondance quadratique, s'il existe sept rayons homologues qui se rencontrent, il en est de même de tous les autres rayons homologues, et le lieu de leur point d'intersection est une quadrique passant par les sommets des deux gerbes.

Voir aussi, au sujet de cette propriété, *G. Darboux* [Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 5 (1868), p. 72, 77] *qui en fait une application dans la construction d'une quadrique définie par neuf points.*

Voir également, *R. Sturm* [Math. Ann. 19 (1882), p. 461] qui discute les rapports de ces deux théories, celle des correspondances quadratiques et celle des faisceaux de corrélations, par les méthodes de la géométrie énumérative.

les problèmes qui ont été surtout traités sont ceux qui concernent la recherche des points doubles de la correspondance, ou celle des couples de points qui se correspondent doublement, ou plus généralement enfin, celle des groupes cycliques d'ordre quelconque de la correspondance. **Th. Reye*[501]) constate, dans le cas général, l'existence de quatre points doubles, réels ou imaginaires*, et celle d'un seul couple de deux points R, R' se correspondant doublement, ceux-ci étant les points doubles d'une involution formée sur la droite RR' par les couples de points U et V situés respectivement sur leurs droites homologues u_k, v_k dans le faisceau de corrélations associées à la transformation quadratique. *S. Kantor*[502]) résout ces deux problèmes *en étudiant deux courbes, l'une, une cubique, lieu du point M dont l'homologue M' est aligné avec M et un point fixe quelconque P, l'autre, une quartique, lieu du point M, dont les deux homologues M_1 et M_{-1} dans la correspondance et dans la correspondance inverse, sont alignés avec le point P; il constate en outre l'existence de deux groupes cycliques de trois points[503]).*

La correspondance quadratique involutive a été signalée en de nombreuses circonstances. Il en existe deux types essentiellement distincts.

Le premier, déjà rencontré par *G. Bellavitis*[504]), a été étudié avec plus de développements par *T. A. Hirst*[505]) et *C. F. Geiser*[506]). Il consiste en une généralisation de la transformation par rayons vecteurs réciproques et fait correspondre entre eux les points P et P' qui sont alignés avec un point fixe S et conjugués par rapport à une conique fixe[507]).*

Le second type a été signalé par *Th. Reye*[508]) qui le construit en faisant une application particulière de la méthode qui lui a servi

501) Z. Math. Phys. 11 (1866), p. 284.

502) Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1880/2), p. 64.

503) Voir aussi *T. A. Hirst*, Quart. J. pure appl. math. 17 (1881), p. 301. Les résultats contenus dans cet article avaient été déjà exposés oralement, en 1865, par *T. A. Hirst* [Report Brit. Assoc. 35, Birmingham 1865, éd. Londres 1866, Misc. communic. p. 6].

504) Nuovi saggi Accad. Padova 4 (1838), p. 243.

505) Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 92. Dans son travail, *T. A. Hirst* donne une discussion complète des courbes qui se transforment en elles-mêmes et de leurs propriétés capitales.

506) Mittheil. naturf. Ges. Bern 1865, p. 97.

507) Voir *B. Igel*, Z. Math. Phys. 17 (1872), p. 516.

508) Z. Math. Phys. 11 (1866), p. 301. L'exemple de *Th. Reye* est déjà signalé par *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 5 (1844), p. 225.

pour construire une correspondance quadratique plus générale; il fait correspondre un point à l'intersection de ses deux droites homologues dans deux transformations par polaires réciproques. Le triangle fondamental est alors le triangle conjugué commun aux deux coniques directrices de ces deux transformations.

A ce second type se ramènent d'autres exemples assez nombreux de correspondances quadratiques involutives.

Tel est d'abord celui de *J. J. A. Mathieu*[509]), *qui désigne sous le nom de *points inverses* par rapport à un triangle ABC, deux points P et P' tels que les droites PA et $P'A$, PB et $P'B$, PC et $P'C$ soient respectivement symétriques l'une de l'autre par rapport aux bissectrices des angles en A, B, C du triangle.*

Tel est aussi l'exemple indiqué par *Cl. Servais*[510]) et *J. Neuberg*[510a]), *qui considèrent deux involutions entre faisceaux de droites les uns de sommet B, les autres de sommet C, et qui à un point P, intersection de deux rayons BP, CP, font correspondre le point P', intersection des rayons BP', CP' respectivement homologues des précédents dans les deux involutions.*

Au même type appartient également la correspondance entre droites, *appelées *transversales réciproques** par *G. Gohierre de Longchamps*[511]), *droites qui rencontrent chacun des côtés d'un triangle fondamental ABC en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté.*

P. H. Schoute[512]) *a montré qu'il ne peut exister que ces deux types de transformations quadratiques involutives, le premier, qu'il appelle irrégulier, et le second, qu'il appelle régulier; il indique en outre quels sont leurs caractères essentiels.* Dans chacun d'eux, il existe un triangle fondamental ABC; chaque sommet de ce triangle correspond, dans le type régulier, à tous les points du côté opposé, tandis que, dans le type irrégulier, ceci n'arrive que pour un seul sommet C, les deux autres sommets, A et B, correspondant respectivement à tous les points des côtés CA et CB. *Dans le type régulier, toute droite issue d'un point fondamental A, B ou C correspond involutivement à une droite issue du même point; dans le type irrégulier, toute droite issue de C se correspond à elle-même, tandis que les droites issues de A correspondent homographiquement aux droites issues de B.*

509) Nouv. Ann. math. (2) 4 (1865), p. 393, 481, 529.

510) Mathesis (1) 7 (1887), p. 129.

510a) Mathesis (1) 8 (1888), p. 177.

511) Nouv. Ann. math. (2) 5 (1866), p. 119.

512) Assoc. fr. avanc. sc. 13 (Blois) 1884[2], p. 42.

On doit à *A. del Re*[513]) une correspondance quadratique entre points et droites formant un système focal. Elle consiste à rapporter projectivement un faisceau de droites S à une ponctuelle u, et à faire correspondre un point quelconque P à la droite qui joint ce point P à l'homologue du rayon SP dans la ponctuelle u[514]).

L'étude des dégénérescences de correspondances quadratiques a été faite, *par les méthodes de la géométrie énumérative,* par *H. Schubert*[515]).

En ce qui concerne les systèmes de correspondances quadratiques, il n'y a à signaler que les deux propositions suivantes, dues à *E. Duporcq*[516]): si deux correspondances quadratiques entre les mêmes plans π et π' ont cinq couples de points homologues communs, elles en ont un sixième; si les deux correspondances ont en commun six couples de points homologues, placés dans une disposition quelconque, elles en ont une infinité dépendant chacun d'une arbitraire.

Si l'on définit ces deux correspondances quadratiques, conformément à une méthode signalée plus haut, en établissant deux correspondances corrélatives entre les plans π et π', pour la première, puis deux autres encore pour la seconde, la première de ces deux propositions résulte d'un théorème de *A. Clebsch*, signalé au n° **24**, relatif à la multiplicité à trois dimensions formée par les corrélations qui ayant cinq couples de points conjugués donnés, en admettent un sixième. Les deux propositions sont même équivalentes.

513) Rendic. Accad. Napoli (2) 3 (1889), p. 101.

514) Signalons encore une construction particulière des correspondances quadratiques, due à *F. Nicoli*, Memorie Accad. Modena (2) 7 (1890), p. 253.

515) Mitt. math. Ges. Hamburg 1 (1881/9), p. 31 [1882].

516) C. R. Acad. sc. Paris 126 (1898), p. 1405. *E. Duporcq* rattache ces propositions à une importante proposition de cinématique: si un plan se déplace de telle façon que cinq de ses points restent sur des sphères ayant leurs centres dans un même plan, il en est de même d'un sixième point du plan mobile [cf. V 6, n^{os} **14** et suiv.].

III 9. CONFIGURATIONS.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **E. STEINITZ** (BRESLAU)
PAR **E. MERLIN** (GAND).

1. Définitions et notations. Considérons un point et une droite. Si l'on n'envisage que les positions relatives de ces deux éléments, deux cas peuvent se présenter. Ou bien le point se trouve sur la droite et les deux éléments sont dits *incidents* ou *unis*. Ou bien le point est en dehors de la droite et les deux éléments sont dits *séparés*. *Deux éléments unis seront dits constituer une *incidence* ou un *couple*. Si un même élément est uni à p autres éléments, il formera avec ces derniers p couples.*

Un groupement de points et de droites du plan est supposé donné, lorsqu'on en a fait connaître les éléments incidents.

Par définition, deux systèmes d'éléments offrent des *groupements équivalents*, quand on peut établir entre les éléments de l'un et ceux de l'autre, une correspondance univoque telle, qu'à un point corresponde un point; à une droite, une droite et à deux éléments incidents, deux éléments incidents; et réciproquement. L'homographie nous fournit des exemples de groupements équivalents. Mais cette transformation n'est évidemment pas la plus générale qui permette de passer d'un groupement à un autre équivalent.

Deux groupements sont dits *réciproques*, quand on peut faire correspondre aux points et aux droites de l'une des figures, respectivement et univoquement, les droites et les points de l'autre, de telle façon qu'à deux éléments incidents correspondent deux éléments incidents, et réciproquement. *En particulier, la transformation corrélative donne des exemples de groupements réciproques.*

Une *configuration plane* est un groupement formé d'éléments situés dans un même plan et tel, que par chaque point passe un même nombre de droites et que sur chaque droite se trouve un même nombre de points. Elle se représente par un symbole de la forme (p_δ, d_π), p désignant le nombre de points et d le nombre de droites de la configuration; δ le nombre de droites qui passent par un même point

et π le nombre de points situés sur une même droite[1]). Les quatre nombres p, δ, d, π qui composent ce symbole satisfont évidemment à la relation suivante:

$$p\delta = d\pi.$$

Dans le cas particulier où $p = d = n$, on déduit de la relation précédente $\delta = \pi = \nu$, et la configuration correspondante se représente communément par le symbole plus simple n_ν[2]).

*Si nous nous plaçons dans l'espace, un point et un plan formeront des éléments *unis* ou *séparés*, suivant que le point est ou n'est pas dans le plan; une droite et un plan seront *unis* ou *séparés* suivant que la droite est ou non dans le plan.*

Généralisant les notions précédentes, une configuration de l'espace *$(A_b^\gamma, B_c^\alpha, C_a^\beta)$* désignera un groupement formé de A points, de B droites et de C plans de l'espace E_3 à trois dimensions, tel que chaque point s'y trouve uni à b droites et à γ plans, chaque droite à c plans et à α points, chaque plan à a points et à β droites. *Entre les neuf nombres qui figurent dans ce symbole, existent les relations suivantes:

$$Ab = B\alpha, \quad Bc = C\beta, \quad Ca = A\gamma.^*$$

Ajoutons qu'une configuration de l'espace ne doit pas nécessairement renfermer trois espèces d'éléments. *Par exemple (A_γ, C_α) représente une configuration formée seulement de points et de plans.*[3])

Les notions qui précèdent sont susceptibles de généralisations immédiates. Tout d'abord, elles s'étendent naturellement à un espace à un nombre quelconque de dimensions. Ensuite, aux éléments fondamentaux, points, droites et plans, on peut adjoindre d'autres éléments tels, par exemple, que des courbes et des surfaces d'espèces déterminées. Enfin la considération d'éléments unis peut être remplacée par celle d'éléments occupant d'autres positions relatives; c'est ainsi que, dans le plan, on étudiera des configurations formées de droites et de coniques, telles que chaque droite soit tangente à un même nombre de coniques et chaque conique à un même nombre de droites. Toutefois, sauf indications contraires, le nom de configuration servira à désigner un des groupements considérés en premier lieu.

Les points, droites et plans qui composent une configuration en constituent les *éléments*. En dehors de ces derniers, il s'en présente d'autres dans l'étude d'une configuration, savoir les *éléments diagonaux*. On entend par là les éléments qui sont déterminés par des élé-

1) *J. de Vries*, Acta math. 12 (1888/9), p. 63.
2) *Th. Reye*, Acta math. 1 (1882/3), p. 94.
3) *J. de Vries*, Sitzgsb. Akad. Wien 100 IIa (1891), p. 822.

ments de la configuration, tout en n'appartenant pas à celle-ci. Ainsi une *diagonale* est une droite qui, sans faire partie des éléments de la configuration, en joint deux points ou est commune à deux plans de celle-ci. De même, un *plan diagonal* est un plan qui, sans appartenir à la configuration, en contient ou trois points non en ligne droite, ou une droite et un point séparés, ou deux droites. Un *point diagonal* est un point qui ne se trouve pas parmi les points de la configuration et qui est uni soit à trois plans non unis à une même droite, soit à une droite et à un plan séparés, soit à deux droites.

*Considérons à présent une configuration $(4_1, 2_2)$ telle que les points 1 et 2 soient sur la droite I et les points 3 et 4 sur la droite II. A cette configuration faisons correspondre la permutation

1 2 3 4 I II,

que l'on pourra appeler la permutation principale. Écrivons ensuite une nouvelle permutation des mêmes chiffres, les chiffres arabes étant permutés entre eux ainsi que les chiffres romains. D'ailleurs, l'une des permutations partielles nouvelles ou les deux pourraient être identiques respectivement à l'une des permutations partielles anciennes ou aux deux. Soit

3 4 2 1 II I

cette permutation. Nous lui ferons correspondre une transformation de la figure en elle-même: le point 1 de la première figure ayant pour transformé le point 3 de la seconde; le point 2, le point 4, etc.; la droite I, la droite II; et la droite II, la droite I. Remarquons que les points 1 et 2, qui se trouvent sur la droite I dans la première figure, ont pour transformés dans la seconde figure, les points 3 et 4 situés sur la droite II, transformée de la droite I. De même 3 et 4 situés sur II, ont pour transformés 2 et 1, situés sur I transformée de II. La permutation considérée fait donc correspondre d'une manière univoque un point de la configuration à un point de cette même configuration, une droite à une droite, de telle sorte qu'à deux éléments unis correspondent deux éléments unis.

Une configuration quelconque étant donnée, on peut, en procédant comme nous venons de le faire dans un cas particulier, lui adjoindre des permutations.* Celles d'entre elles qui conservent la propriété des éléments unis, *ou en d'autres termes, celles qui transforment un couple en un couple, forment un groupe*, que l'on appelle le *groupe des permutations* de la configuration[4]).

4) *A. Schoenflies,* Math. Ann. 31 (1888), p. 43.

*Il existe d'ailleurs des permutations ne rentrant pas dans ce groupe. Reprenons, en effet, la configuration $(4_1, 2_2)$ choisie plus haut, et écrivons la permutation

1 3 2 4 II I,

laquelle fait correspondre aux éléments unis 1 et I, les éléments séparés 1 et II; aux éléments unis 4 et II, les éléments séparés 4 et I. Nous aurons un exemple de permutation n'appartenant pas à la configuration.*

*Si la configuration est réciproque à elle-même, on pourra ajouter aux permutations envisagées plus haut celles obtenues en faisant correspondre aux chiffres romains les chiffres arabes et réciproquement. Ces permutations s'appelleront des *réciprocités.* A toute permutation, du premier type, c'est-à-dire à toute permutation proprement dite de la configuration correspondra alors une réciprocité de celle-ci et inversement.* L'ensemble des permutations de la configuration formera par suite un groupe d'ordre double.

Les considérations précédentes s'étendent d'elles-mêmes aux configurations de l'espace.

Si l'on permute séparément les points, les droites ou les plans, il y aura lieu d'envisager, en général, trois groupes de permutations attachés respectivement aux points, aux droites et aux plans. Dans tous les cas dignes de retenir l'attention, ces groupes sont holoédriques isomorphes.

Deux éléments qui se transforment l'un dans l'autre dans au moins une permutation de la configuration sont dits *similaires.* *Considérons, par exemple, un polygone plan de n côtés. Les sommets et les côtés de ce polygone forment une configuration n_2, qui se transforme en elle-même dans $2n$ permutations. Tous les sommets sont similaires deux à deux, ainsi que tous les côtés. Considérons encore la configuration 7_3, formée par les sommets et les côtés d'un triangle et d'un quadrilatère Cette configuration admet 6×8 ou 48 permutations, les sommets du triangle sont similaires deux à deux, car deux sommets quelconques se correspondent dans 2×8 ou 16 permutations. De même, deux sommets quelconques du quadrilatère sont similaires, car ils se correspondent dans 2×6 ou 12 permutations. Mais aucune permutation de la configuration ne fait correspondre un sommet du triangle à un sommet du quadrilatère; par suite deux tels sommets ne sont pas similaires.*

D'une manière analogue, on dira de deux couples qu'ils sont similaires si les éléments qui constituent l'un d'eux sont respectivement les transformés des éléments de l'autre dans une, au moins, des permutations de la configuration.

Dans le cas où les éléments d'une espèce jouissent de la propriété d'être similaires deux à deux, leur groupe de permutations est évidemment transitif. Il ne s'ensuit naturellement pas qu'il en est de même pour les éléments d'une autre espèce[5]. *D'une manière analogue, si les éléments de même espèce sont similaires deux à deux, on ne pourra pas en conclure que les couples sont similaires deux à deux[6].*

Lorsque tous les groupes de permutations d'une configuration sont transitifs, celle-ci est dite régulière[7].

La notation (p_δ, d_π) ou $(A_b^\gamma, B_c^\alpha, C_a^\beta)$ ne suffit pas en général à caractériser une configuration déterminée. Aussi, dans le cas d'une configuration plane, laquelle ne renferme que deux espèces d'éléments, emploie-t-on habituellement la représentation suivante.

Les éléments d'une même espèce sont représentés par des nombres entiers, ceux-ci étant pris autant de fois qu'il y a d'éléments de l'autre espèce unis à un même élément de la première. On range ensuite les nombres obtenus en autant de colonnes qu'il y a d'éléments de la seconde espèce, de telle manière que les nombres représentant les éléments de la première unis à un même élément de la seconde se trouvent dans une même colonne. Par exemple, le tableau

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
5 6 7 8	6 5 8 7	7 8 5 6	8 7 6 5
9 9 9 9	10 10 10 10	11 11 11 11	12 12 12 12,

représente une configuration plane particulière, $(12_4, 16_3)$ ou $(16_3, 12_4)$, selon que les nombres de 1 à 12 désignent des points ou des droites. Un pareil tableau jouit de certaines propriétés, à savoir:

1°) chaque colonne se compose d'un même nombre de nombres;

2°) les nombres d'une même colonne sont différents;

3°) un nombre quelconque figure dans un même nombre de colonnes;

4°) deux colonnes ont au plus un nombre en commun.

Tout tableau jouissant des quatre propriétés précédentes sera aussi désigné sous le nom de configuration, ou mieux de *configuration*

5) *J. de Vries* a donné des exemples de configurations planes dont les points sont similaires deux à deux et qui présentent plusieurs espèces de droites. Acta math. 12 (1888/9), p. 75.

6) *E. Steinitz*, Archiv Math. Phys. (3) 16 (1910), p. 289.

7) *A. Schoenflies*, Math. Ann. 31 (1888), p. 43.

schématique, que ce tableau corresponde ou non à une configuration réalisable géométriquement.

2. Note historique. Problème de Reye sur les configurations. Méthode de recherche. En dehors des cas banaux, en connaît depuis longtemps deux configurations planes, la configuration de Desargues et celle de Pascal.

La première est une configuration 10_3. On la définit en considérant deux triangles homologiques. Les six sommets de ces triangles, le centre d'homologie et les trois points de rencontre des côtés homologues fournissent les dix points de la configuration. Quant aux dix droites, elles se composent des six côtés des deux triangles, de l'axe d'homologie et des trois droites joignant les sommets homologues.

La seconde est une configuration 9_3. Pour la définir, traçons deux droites dans le plan et construisons un hexagone dont les sommets se trouvent alternativement sur l'une et sur l'autre de ces droites. Nous savons, que les côtés opposés d'un tel hexagone se coupent en des points situés sur une même droite, appelée *droite de Pascal.* Cela étant, la configuration de Pascal est formée par les sommets et les côtés de l'hexagone, par les points d'intersection des côtés opposés, par les deux droites tracées tout d'abord et par la droite de Pascal.

Au commencement du 19ième siècle, *J. V. Poncelet*[8] avait remarqué que les douze centres de similitude de quatre sphères prises deux à deux, les seize axes d'homothétie de ces sphères considérées trois à trois, les huit plans d'homothétie et les quatre faces du tétraèdre formé par leurs centres, constituent une configuration $(12_4^6, 16_3^3, 12_6^4)$. *J. Steiner*[9] montra que les 27 droites d'une surface du troisième ordre, leurs points d'intersection et les plans qui contiennent trois d'entre elles, forment une configuration $(135_2^9, 27_5^{10}, 45_{27}^3)$. Il fit remarquer de plus, que l'on peut en déduire une configuration $(135_{16}^9, 720_2^3, 45_{27}^{32})$, en substituant aux 27 droites les diagonales suivant lesquelles se coupent les 45 plans de la première configuration.

En 1845, *A. Cayley*[10] avait déjà fait connaître une classe étendue de configurations, mais ses recherches furent peu remarquées. Aussi, lorsque *Th. Reye*[11] eut appelé l'attention des mathématiciens sur ces

8) Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822, p. 409.

9) J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 135.

10) Id. 31 (1846), p. 213.

11) Tout d'abord dans son ouvrage: Geometrie der Lage (2e éd.) 1, Hanovre 1877, p. 4. Le nom de configuration ne s'appliquait à l'origine qu'aux configurations comprenant un même nombre de points et de droites, ou de points et de plans.

groupements remarquables, auxquels il donna le nom de configurations, les configurations cayleyennes [n° **15**] furent-elles découvertes à nouveau par *S. Kantor*, *H. Schubert*, *G. Veronese* et d'autres.

C'est *Th. Reye* qui le premier entreprit l'étude systématique des configurations. Le problème qu'il s'est tout d'abord proposé est la détermination de toutes les configurations désignées par un même symbole donné: (p_δ, d_π) ou $(A_b^\gamma, B_c^\alpha, C_a^\beta)$.

Considérons, par exemple, le cas des configurations planes. La première recherche qui se présente naturellement dans cette étude, a pour but la construction de toutes les configurations *schématiques* correspondant au symbole donné. Les résultats seront ensuite discutés de façon à éliminer les configurations qui ne pourraient être réalisées géométriquement. A ce propos, il est nécessaire de définir, d'une manière précise, ce que l'on entend par configuration réalisable géométriquement. La définition qui se présente d'elle-même à l'esprit est la suivante: une configuration (p_δ, d_π) est dite *réalisable géométriquement*, *ou plus simplement *géométrique*,* lorsqu'on peut construire p points et d droites distinctes, de telle sorte que par chaque point passent δ droites distinctes parmi les d, et δ seulement, et que sur chaque droite se trouvent π points distincts parmi les p, et π seulement.

Une configuration schématique n'est pas toujours réalisable géométriquement. *Il se peut, en effet, qu'on ne puisse pas construire autant de droites et de points distincts que l'indique la configuration schématique, de manière à réaliser géométriquement les couples contenus dans celle-ci; ou bien encore que, pour rendre cette construction possible, il faille introduire d'autres couples que ceux que l'on rencontre dans la configuration schématique. Par exemple, la configuration 7_3 est réalisable schématiquement de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 7 & 7 & 6, \end{array}$$

mais elle n'est pas géométrique. En effet, remarquons que les points 1, 2 et 3 ne peuvent être choisis en ligne droite, sinon les droites 2 5 1 et 3 6 2 ne seraient pas distinctes. Ensuite, d'après le tableau schématique, le point 5 se trouve sur la droite 1 2, le point 4 sur la droite 1 3 et le point 6 sur la droite 2 3. La dernière colonne montre que, en outre, les points 4, 5 et 6 sont en ligne droite. Donc les points 1, 2 et 3 sont les sommets d'un triangle et 4, 5, 6 sont trois points pris respectivement sur les côtés opposés de manière à se trouver en ligne droite. On en conclut, par la géométrie élémentaire, que les droites 1 6, 2 4, 3 5 ne peuvent se couper en un même point 7, comme l'exige la configuration schématique. Celle-ci n'est donc pas géométrique.

De la définition de la configuration géométrique il résulte encore que, par exemple, la configuration schématique

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

n'est pas réalisée géométriquement par les sommets 1, 2, 3, les côtés 1 2, 2 3, 3 1 d'un triangle et les points 4, 5, 6 situés respectivement sur les côtés opposés aux sommets 1, 2, 3, joints aux trois droites 14, 25, 36. En effet, cette figure contient des couples étrangers à ceux de la configuration schématique. La figure montre que 2 est uni à 16, 1 à 35 et 3 à 24. D'ailleurs cette configuration est réalisée géométriquement par les sommets et les côtés de l'hexagone quelconque 1 6 3 5 2 4 1.*

On voit donc que les conditions d'existence géométrique d'une configuration sont plus restrictives que celles que nous avons énoncées à propos des configurations schématiques.

En adoptant la définition qui précède, on est conduit à la remarque suivante.

Tout d'abord, il est évident que la transformation projective n'altère pas les configurations. D'autre part, on sait qu'il existe toujours une transformation projective et une seule qui fait correspondre à quatre points d'un plan, tels que trois quelconques ne sont pas en ligne droite, quatre points arbitraires satisfaisant aux mêmes conditions.

Cela étant, considérons une configuration géométrique (p_δ, d_π) contenant au moins quatre points vérifiant les conditions précédentes. Nous pourrons choisir arbitrairement ces quatre points. Pour construire la configuration, il s'agira ensuite de déterminer $p-4$ nouveaux points et d droites satisfaisant à un nombre d'équations $p\delta = d\pi$ égal au nombre de couples [n° **1**]. *La détermination d'un point ou d'une droite dépendant, dans le plan, de deux paramètres,* une configuration (p_δ, d_π) ne sera, en général, réalisable géométriquement que si l'on satisfait à l'inégalité

$$2(p+d) - p\delta - 8 \geq 0.$$

Pour que la configuration soit géométrique, dans le cas où

$$2(p+d) - p\delta - 8 < 0,$$

il faudra que, parmi les équations en nombre $p\delta = d\pi$, il y en ait au moins $p\delta - 2(p+d) + 8$ qui soient des conséquences des autres. Ceci ne se présentera vraisemblablement que dans relativement peu de cas. C'est ce que l'on constate d'ailleurs, quand on se borne aux configurations ne contenant qu'un petit nombre d'éléments. Il sera donc naturel de s'occuper avant tout des configurations pour lesquelles lexpression

$$2(p+d)-p\delta-8$$

*ou

$$\frac{d}{\delta}\left[2(\pi+\delta)-\pi\delta-8\,\frac{\delta}{d}\right]$$

est positive ou nulle, ou encore, si l'on désire une condition ne liant que les indices δ et π,* des configurations pour lesquelles l'inégalité

$$2(\pi+\delta)-\pi\delta>0$$

est vérifiée.

C'est à propos du *problème de Reye* que se développe l'étude des configurations. La plupart des mémoires se rapportent à des figures formées de points, de droites et de plans, que l'on rencontre dans les recherches géométriques. Les configurations régulières y sont presque exclusivement étudiées. On recherche notamment les circonstances auxquelles est due l'existence de la configuration. Ces circonstances généralisées conduisent naturellement à des familles étendues de configurations.

Les méthodes qui permettent de déduire d'une configuration plusieurs autres sont fort nombreuses[12]; aussi devrons-nous ici nous limiter aux principales. Parlons d'abord des deux procédés, dont l'un consiste à supprimer, l'autre à adjoindre certains éléments.

Le premier conduit souvent à des configurations nouvelles par l'emploi exclusif des méthodes de l'analyse combinatoire. D'ailleurs, l'examen du tableau schématique de la configuration primitive permet de voir celles que l'on en peut tirer. *J. de Vries*[13]), entre autres, a étudié, à ce point de vue, les configurations cayleyennes. Il est à remarquer que, même si la configuration primitive est générale, c'est-à-dire donne naissance à toutes les configurations d'une même espèce par la variation des éléments qui peuvent être choisis arbitrairement dans la construction, il n'en est pas de même de la configuration dérivée.

Le second procédé fournit des configurations nouvelles en utilisant, dans le plan, certaines propriétés des courbes du troisième ordre et, dans l'espace, la théorie des groupes finis de transformations projectives et decorrélations.

En appliquant à une configuration de l'espace à n dimensions la

12) Au sujet de méthodes particulières de cette espèce, consulter *K. Zindler*, Sitzgsb. Akad. Wien 105 IIa (1896), p. 311.

13) Math. Ann. 34 (1889), p. 227; 35 (1890), p. 401.

méthode des projections et des sections, on peut être conduit à des configurations plus compliquées dans un espace à un nombre moindre de dimensions.

A côté de ce genre de recherches, la détermination des configurations schématiques correspondant à un symbole donné n'occupe qu'une place restreinte. Dans le plan, par exemple, l'étude de ce dernier problème est presque exclusivement limitée aux configurations n_3.

L'inégalité que l'on a supposée exister entre les indices est encore satisfaite pour $\delta=3$, $\pi=4$ ou pour $\delta=3$, $\pi=5$ et pour $\delta=4$, $\pi=3$ ou pour $\delta=5$, $\pi=3$. Il serait probablement avantageux de traiter ces cas comme celui pour lequel $\delta=\pi=3$, en essayant d'abord de les former schématiquement, puisqu'il est à supposer que la plupart des configurations schématiques seront réalisables géométriquement.

3. Formation des configurations schématiques planes correspondant aux symboles n_3. Par tout point d'une configuration n_3 passent, on le sait, trois droites sur chacune desquelles se trouvent trois points. Une telle configuration comprend donc au moins sept points. Supposons, en premier lieu, $n=7$, nous ne trouverons qu'une seule configuration schématique. On arrive à la même conclusion si $n=8$. *S. Kantor* fut le premier à s'occuper de la détermination systématique des configurations n_3 correspondant à une valeur donnée de n. Il met en évidence l'existence de 3 configurations 9_3 et de 10 configurations 10_3[14]). Sa démonstration fut complétée plus tard par *H. Schröter*[15]).

V. Martinetti[16]) et *R. Daublebsky von Sterneck*[17]) résolurent ensuite complètement le problème, le premier dans le cas où $n=11$, le second dans celui où $n=12$: ils trouvèrent respectivement 31 configurations 11_3 et 228 configurations 12_3. Toutes les configurations pour lesquelles $n\leq 10$ jouissent de la propriété d'être réciproques à elles-mêmes. Cette proposition ne s'étend d'ailleurs pas au cas de $n=11$.

C'est à *V. Martinetti* que l'on doit une méthode générale permettant de former à l'aide des configurations $(n-1)_3$, des configurations n_3 et d'obtenir toutes ces dernières dès qu'on connaît les premières. Voici comment procède *V. Martinetti*. Considérons deux droites ABC et $A_1B_1C_1$ d'une configuration $(n-1)_3$; supposons de plus que leur point d'intersection soit un élément diagonal. Les droites joignant le

14) Sitzgsb. Akad. Wien 84 II (1881), p. 915/1291.

15) Nachr. Ges. Gött. 1889, p. 193.

16) Ann. mat. pura appl. (2) 15 (1887/8), p. 1.

17) Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 223.

point A, par exemple, aux trois points A_1, B_1, C_1 ne sauraient appartenir toutes les trois à la configuration, sinon par le point A passeraient quatre droites et non trois. Admettons donc que la droite AA_1 n'appartient pas à la figure et, dans le tableau schématique, remplaçons les deux colonnes

$$\begin{matrix} A & A_1 \\ B & B_1 \\ C & C_1 \end{matrix}$$

par les trois suivantes:

$$\begin{matrix} A_2 & A_2 & A_2 \\ B & B_1 & A \\ C & C_1 & A_1, \end{matrix}$$

où A_2 désigne un nouveau point, le point d'intersection de BC et de B_1C_1, A et A_1 étant écartés de ces deux droites pour former une nouvelle droite avec A_2. Le nouveau schéma représentera une configuration n_3. Cela étant, *V. Martinetti* appelle configuration n_3 *réductible* celle que l'on peut déduire d'une configuration $(n-1)_3$ par le procédé précédent; *irréductible*, celle qui ne jouit pas de cette propriété. *V. Martinetti*[18]) a trouvé *toutes* les configurations n_3 qui sont irréductibles, ce qui constitue un des résultats les plus remarquables obtenus dans toute cette théorie. Il distingue deux classes de configurations irréductibles; la première fournit une configuration pour toute valeur de n, la seconde en donne une pour toute valeur de n, multiple de 10. Le tableau schématique des configurations de la première classe peut s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n-3, & n-2, & n-1, & n, \\ 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n-2, & n-1, & n, & 1, \\ 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & n, & 1, & 2, & 3. \end{matrix}$$

Il représente un polygone de n sommets, lequel est régulièrement *inscrit et circonscrit* à lui-même.

On définit une configuration de la seconde classe en considérant une série de triangles $D_1, D_2, \ldots, D_{2m}$ disposés de telle manière que chacun d'eux soit homologique avec le suivant et le dernier avec le premier. Les éléments de la configuration comprennent alors, outre les sommets et les côtés des triangles, les droites joignant les sommets homologues des couples de triangles D_1D_2; D_3D_4; ...; $D_{2m-1}D_{2m}$ ainsi que les centres d'homologie correspondants, et les points de rencontre des côtés homologues des couples de triangles D_2D_3; ...; $D_{2m}D_1$, ainsi que les axes d'homologie correspondants. Faisons, par exemple, $n = 10$, nous trouverons de la sorte la configuration de Desargues. En dehors des configurations précédentes, il en existe encore 3 irréductibles, à savoir: la configuration 9_3 de Pascal et deux configurations 10_3.

*Remarquons ici que la configuration de Desargues peut être représentée schématiquement par le tableau suivant:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 10 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6. \end{matrix}$$

Par suite, elle peut être considérée comme réalisée par les sommets et les côtés d'un décagone, dont les sommets se suivent dans l'ordre naturel 1, 2, ..., 10, 1. Si l'on prend 9 pour premier sommet, le décagone 9, 10, ..., 9, d'ailleurs identique au précédent, aura ses sommets situés sur les côtés du décagone 1, 2, ..., 10, 1, pris alternativement de trois en trois et de neuf en neuf. Inversement, les côtés du décagone 1, 2, ..., 1 contiennent les sommets du décagone 9, 10, ..., 9, pris alternativement de neuf en neuf et de trois en trois. La configuration de Desargues représente donc un décagone inscrit et circonscrit à lui-même suivant une règle simple. Toutefois la règle est différente de celle qui se rapporte aux configurations de la première classe. On voit ainsi que l'inscription régulière n'est pas une propriété caractéristique des configurations de la première classe.*

Parmi les configurations obtenues par le procédé de *V. Martinetti*, on en rencontrera, en général, d'équivalentes entre elles [n° **1**]. De là la nécessité de posséder un moyen permettant de reconnaître si deux configurations sont équivalentes ou non. Parmi les méthodes qui facilitent la recherche de l'équivalence, il faut citer celle qui repose sur la considération des *figures restantes*, introduite par *S. Kantor*[19]). La figure restante relative à un point P d'une configuration n'est autre que l'ensemble formé par les points de celle-ci, non reliés à P par des droites de la configuration, joints aux droites de la configuration qui réunissent ces points. Pour $n = 9$, on trouve deux espèces de figures restantes; pour $n = 10$, on en trouve trois; pour $n = 11$, on en trouve six; pour $n = 12$, on en trouve dix-huit. L'ensemble des figures restantes relatives aux divers points d'une configuration constitue le *système restant* de la configuration. Si deux configurations sont équivalentes, il en sera évidemment de même de leurs systèmes

18) Ann. mat. pura appl. (2) 15 (1887/8), p. 11.

19) Sitzgsb. Akad. Wien 84 II (1881), p. 1298.

restants, mais la réciproque n'est pas vraie. *V. Martinetti*[20]) montra en effet, qu'il existe des configurations 11_3 qui sont différentes tout en possédant des systèmes restants équivalents.

Les considérations qui suivent, permettent de se faire une idée de la nature des configurations n_3. Imaginons un ensemble de polygones ayant en tout n sommets; supposons de plus que chacun des côtés contienne, outre les deux sommets qui le limitent, un troisième point compris parmi les $n-2$ restants. Un tel ensemble pourra être dit inscrit et circonscrit à lui-même et constituera une configuration n_3. Réciproquement, toute configuration n_3 peut être considérée comme formée, de plusieurs manières, par un tel ensemble de polygones[21]). La démonstration de cette proposition repose sur la possibilité d'écrire le tableau schématique de telle sorte que chacune des lignes horizontales contienne tous les nombres entiers de 1 à n.

S. Kantor a démontré que, si n est $\leqq 10$, toute configuration n_3 peut être représentée par un seul polygone (formant une seule ligne brisée, dont les extrémités se rejoignent) inscrit et circonscrit à lui-même.

On verrait qu'il en est encore de même dans le cas où $n = 11$. Mais, contrairement à un théorème de *Kantor*, la proposition cesse d'être vraie en général. Bien plus, un nombre entier positif k étant donné arbitrairement, il existe toujours des configurations n_3 telles que le nombre des polygones qui les représente est au moins égal à k[22]).

A. Schoenflies[23]) s'est proposé de former les configurations n_3 qui sont régulières. A cet effet, il les groupe d'après le nombre α de triangles ayant un point de la configuration pour sommet commun et dont les côtés et les autres sommets appartiennent au système. La recherche mène tout d'abord à la première classe de configurations irréductibles dont il a été question plus haut et qui fournit une configuration pour chaque valeur de n; les nombres α correspondants sont 12 pour $n = 7$; 9 pour $n = 8$; 8 pour $n = 9$ et 6 pour $n \geqq 10$. Cette classe renferme toutes les configurations régulières pour lesquelles les trois points situés sur une même droite de la configuration considérée sont reliés à un quatrième point de la configuration par des droites appartenant à celle-ci.

20) Ann. mat. pura appl. (2) 15 (1887/8), p. 26.

21) Id. (2) 15 (1887/8), p. 2. Démonstration par *E. Steinitz*, Diss. Breslau **1894**, p. 7.

22) *E. Steinitz*, Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 293.

23) Math. Ann. 31 (1888), p. 43. Les recherches de *A. Schoenflies* ont été reprises, corrigées et complétées par *Ada Puccini*, Le configurazioni piane regolari d'indice 3, Padoue 1909.

On trouve ensuite deux configurations correspondant à $\alpha = 6$, à savoir la *configuration de Desargues* et la *configuration de Pascal.*

Pour toutes les autres configurations régulières, α est $\leqq 4$. Ainsi le cas de $\alpha = 5$ doit être exclu. Ajoutons que chacune des valeurs $\alpha = 4, 3, 2, 1$ ou 0 fournit des solutions[24]). L'examen des cas $\alpha = 4$ et $\alpha = 3$ conduit à des cycles de polygones qui sont, l'un par rapport à l'autre, régulièrement inscrits et circonscrits.

A. Schoenflies recherche ensuite toutes les configurations de cette dernière espèce, ainsi que les groupes de permutations qui leur appartiennent. En dehors de celles qui peuvent être représentées par un seul polygone inscrit et circonscrit à lui-même, on est amené à diviser ces configurations en deux classes, lesquelles jouissent des propriétés suivantes: Appelons $q+1$ le nombre des polygones $P_0, P_1, \ldots, P_q$ d'une configuration de l'espèce considérée, ces polygones étant rangés dans un ordre tel que chacun deux soit circonscrit au suivant et le dernier au premier. Désignons ensuite par $E_{i0}, E_{i1}, \ldots, E_{ip}$ les sommets que l'on rencontre successivement en parcourant, dans un même sens, le périmètre du polygone P_i. Cela étant, le côté $E_{i,k}E_{i,k+1}$ du polygone P_i contient le sommet $E_{i+1,(kl)}$ du polygone P_{i+1}, l étant un nombre entier positif premier avec $p+1$ et le second indice (kl) de $E_{i+1,(kl)}$ représentant le reste de la division de kl par $p+1$. D'ailleurs l, nombre fixe, au même titre que p et q, est supposé indépendant de i et de k. Quant au nombre i, il peut recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q-1$. En outre, pour les configurations de la première classe, le côté $E_{q,k}E_{q,k+1}$ du polygone P_q ne contient pas en général le sommet $E_{0,(kl)}$ du polygone P_0, mais bien le sommet $E_{0,(r+kl)}$ et l'on a les relations

$$\left.\begin{aligned} r(l-1) &\equiv 0 \\ l^{q+1} &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{mod. } p+1).$$

Pour les configurations de la seconde classe, le côté $E_{q,k}E_{q,k+1}$ contient le sommet $E_{0,(r-kl)}$, et les relations

$$\left.\begin{aligned} (r-1)(l-1) &\equiv 1 \\ l^{q+1} &\equiv -1 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{mod. } p+1)$$

sont satisfaites.

Certaines configurations peuvent, d'ailleurs, être considérées comme appartenant à la fois à l'une et à l'autre des classes. De plus, on n'obtient pas de cette façon toutes les configurations régulières n_3.

24) La démonstration de *A. Schoenflies*, en vertu de laquelle le cas $\alpha = 1$ doit être exclu, repose sur une erreur. Voir *Ada Puccini*, Le configurazioni[23]), p. 53; *E. Steinitz*, Archiv Math. Phys. (3) 16 (1910), p. 311/2.

Remarquons encore que, si tous les points d'une configuration n_3 sont similaires deux à deux et si n n'est pas un multiple de 3, la configuration est régulière. Au contraire, dans le cas où n est multiple de 3, la configuration contient une, deux ou trois espèces de droites. *S'il existe deux espèces de droites, l'une contient $\frac{n}{3}$ droites l'autre $\frac{2n}{3}$. S'il y a des droites de trois espèces, chacune de celles-ci contient $\frac{n}{3}$ droites. En partant de configurations planes $[(3\nu)_2, (2\nu)_3]$, *E. Steinitz*[25]) réalise des configurations entrant dans les deux derniers cas. Dans le second cas, l'exemple le plus simple est fourni par une configuration 18_3. Dans le troisième se rencontre une configuration 243_3.*

Enfin parmi les configurations régulières n_3, il en est qui ne sont pas réciproques à elles-mêmes[26]).

4. Propriétés géométriques des configurations n_3 et des configurations n_4. La configuration schématique 7_3 est irréalisable géométriquement. Le schéma de la configuration 8_3 montre que celle-ci est formée de deux quadrilatères inscrits et circonscrits l'un à l'autre.

A. F. Möbius[27]) fit remarquer, dès 1828, que cette figure géométrique ne saurait être complètement réelle. Toutefois il existe une configuration imaginaire correspondant au tableau schématique, les quatre diagonales des deux quadrilatères s'y coupent en un même point. Si l'on joint à ce système les quatre diagonales et leur point commun, on obtient une configuration $(9_4, 12_3)$ [Voir nº **5**].

Les trois configurations 9_3 sont représentables par des constructions géométriques réelles[28]).

Parmi les dix configurations schématiques 10_3, neuf sont géométriques[29]), tandis que toutes les configurations 11_3 le sont et admettent des représentations réelles. Il semble que cette propriété des configurations 11_3 s'étende à tous les cas pour lesquels $n > 10$. Toutefois la proposition n'est pas démontrée. En ce qui regarde la construction même, *V. Martinetti*[30]) montra, en s'appuyant sur la décomposition des configurations n_3 en ensembles de polygones, qu'elle se ramène toujours à la détermination des points doubles de deux ponctuelles projectives de même base, et, par suite, peut être réalisée au moyen de la règle et du compas. Un grand nombre de configurations n_3 ne nécessitent même que l'emploi de la règle seule. Tel est le cas pour les trois configurations 9_3, pour les configurations qui admettent une représentation formée de cycles de triangles, dont chacun est circonscrit au suivant, pour les configurations irréductibles de la seconde classe, ainsi que pour quelques configurations 10_3, 11_3, etc. D'ailleurs, parmi les configurations qui exigent, en général, l'emploi de la règle et du compas, se présentent des cas particuliers pour lesquels la règle seule suffit.

H. Schröter[31]) a établi que les configurations irréductibles de la première classe, de même que les configurations 10_3, peuvent être construites en s'appuyant sur des propriétés connues des courbes du troisième ordre. La méthode de *H. Schröter* peut être généralisée[32]) et appliquée à la plupart des configurations n_3.

*Nous terminerons ce numéro par quelques considérations relatives aux configurations n_4. *E. Merlin*[33]) a publié sur ce sujet un mémoire récent que nous résumerons brièvement ici. Tout d'abord, il n'existe qu'une seule configuration schématique 13_4, ainsi qu'une seule configuration schématique 14_4, lesquelles ne sont pas réalisables géométriquement. Quant aux configurations schématiques 15_4, on en distingue trois espèces suivant qu'il existe cinq, un, ou qu'il n'existe aucun triangle dont les côtés appartiennent à la configuration et dont les sommets sont des points diagonaux. Elles ne sont pas géométriques et jouissent avec les deux précédentes de la propriété suivante, laquelle est commune à toutes les configurations n_ν, ainsi que l'a démontré *E. Steinitz*[32]). Il est possible d'écrire le tableau représentatif de telle manière que chaque ligne horizontale contienne tous les nombres de 1 à 15, employés pour désigner les points. Nous avions vu plus haut que cette propriété appartient également aux configurations n_3.*

*En vertu d'une remarque faite au nº 2, une configuration (p_δ, d_π) n'est en général réalisable géométriquement, que si l'on satisfait à l'inégalité

$$2(p+d) - p\delta - 8 \geqq 0,$$

laquelle n'est pas vérifiée dans le cas des configurations n_4 ($p = d = n$, $\delta = 4$). On pourrait être tenté de conclure qu'il existe peu de configurations géométriques n_4. Il n'en est rien. Bien au contraire, on

25) Archiv Math. Phys. (3) 16 (1910), p. 289/313.
26) *E. Steinitz*, id. p. 308/10.
27) J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 276; Werke 1, Leipzig 1885, p. 437.
28) *S. Kantor*, Sitzgsb. Akad. Wien 84 II (1881), p. 915; *H. A. Schwarz* [Sitzgsb. Akad. Berlin 1912, p. 307] a montré que chaque configuration 9_3 peut être construite de façon à pouvoir être ramenée à elle-même par une rotation de 120°.
29) *H. Schröter*, Nachr. Ges. Gött. 1889, p. 193.
30) Ann. mat. pura appl. (2) 15 (1887/8), p. 2.
31) Nachr. Ges. Gött. 1888, p. 237; id. 1889, p. 193.
32) *E. Steinitz*, Diss. Breslau 1894.
33) *Acad. Belgique, Bull. classe sc. 1913, p. 647.*

peut montrer qu'il existe une infinité de configurations géométriques n_4, ce qui rend ces dernières particulièrement intéressantes. En effet, partant de ce que toute configuration (p_δ, d_π) donne naissance à une infinité de configurations de symbole

$$\{(p\pi^n)_{\delta+n}, [p\pi^{n-1}(\delta+n)]_\pi\},$$

on démontre que, de toute configuration (p_δ, d_π) dont les indices δ, π ne dépassent pas 4, on déduit une configuration n_4. Par exemple, toute configuration n_3 conduira à une configuration $16n_4$; la configuration $[(2n)_2, n_4]$, que l'on réalise aisément au moyen d'un polygone de n côtés, en adjoignant aux n côtés les n sommets et les n points d'intersection des côtés pris de deux en deux, mène à une configuration $32n_4$. D'une manière analogue, les configurations $(9_4, 12_3)$ et $(12_4, 16_3)$, étudiées au n° 5, conduisent respectivement à des configurations 48_4 et 64_4.

Enfin, généralisant le procédé employé par *V. Martinetti* dans la recherche des configurations n_3, on trouve que, de toute configuration n_4 pour laquelle il existe trois droites se coupant deux à deux en des points étrangers à la configuration, et telles que l'un des triangles ayant ses sommets respectivement sur ces trois droites ait ses côtés étrangers à la configuration, on déduit une configuration $(n+1)_4$. Soient en effet

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{matrix}$$

les trois colonnes représentant trois droites de l'espèce considérée et les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ étant étrangers à la configuration. Si l'on remplace ces trois colonnes par les quatre suivantes:

$$\begin{matrix} A & A & A & A \\ A_1 & A_2 & B_2 & C_2 \\ B_1 & A_3 & B_3 & C_3 \\ C_1 & A_4 & B_4 & C_4, \end{matrix}$$

on aura ajouté une colonne et un point, tout en continuant à satisfaire aux conditions du tableau schématique. On a là un procédé permettant de construire une infinité de configurations n_4; car il est facile de voir que, pour des valeurs de n supérieures ou égales à trente, la configuration contient au moins trois droites satisfaisant aux conditions énoncées plus haut[33]).*

ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN MARS 1992
PAR L'IMPRIMERIE
DE LA MANUTENTION
A MAYENNE
N° 10-92

Dépôt légal : Mars 1992

La fin de l'article n'a pas été publiée en raison de la guerre.

Paul DU BOIS-REYMOND
• ▭ *Théorie générale des fonctions*

Jean-Baptiste DUMAS
• ▭ *Leçons sur la philosophie chimique*

Ernest DUPORCQ
• ▭ *Premiers principes de géométrie moderne*

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
Tout ce qui a paru de l'édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK.
• ▭ *Arithmétique et Algèbre*
• ▭ *Analyse*
• ▭ *Géométrie*
• ▭ *Mécanique*
• ▭ *Physique*
• ▭ *Géodésie et Géophysique*
• ▭ *Astronomie*
• ▭ *Compléments*

F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)
• ▭ *Exercices de géométrie*
comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2.000 questions résolues
• ▭ *Exercices de géométrie descriptive*

Pierre FERMAT
• *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*, par Émile BRASSINNE

Joseph FOURIER
• *Théorie analytique de la chaleur*

Maurice FRÉCHET
• *Les espaces abstraits*

Augustin FRESNEL
• *Mémoire sur la diffraction de la lumière*

Évariste GALOIS
• *Œuvres mathématiques*
suivies de
— *Influence de Galois sur le développement des mathématiques*, par Sophus LIE

Félix R. GANTMACHER
• *Théorie des matrices*

Carl Friedrich GAUSS
• *Recherches arithmétiques*

Francisco GOMES TEIXEIRA
• *Traité des courbes spéciales planes et gauches (3 tomes)*

Édouard GOURSAT
• ▭ *Cours d'Analyse mathématique (3 tomes)*

Édouard GRIMAUX
• ▭ *Lavoisier, 1743-1794*
d'après sa correspondance, ses manuscrits, ses papiers de famille et d'autres documents inédits

Jacques HADAMARD
• *Leçons de géométrie élémentaire (2 tomes)*
• *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*
suivi de
— *L'Invention mathématique*, par Henri POINCARÉ

Paul R. HALMOS
• ▭ *Introduction à la théorie des ensembles*

G. H. HARDY
• ▭ *Divergent Series* (en anglais)

Werner HEISENBERG
• *Les principes physiques de la théorie des quanta*

Hermann von HELMHOLTZ
• *Optique physiologique (2 tomes)*
• *Théorie physiologique de la musique*

David HILBERT
• *Sur les problèmes futurs des mathématiques (Les 23 Problèmes)*
• *Théorie des corps de nombres algébriques*

Camille JORDAN
• *Traité des substitutions et des équations algébriques*
• ▭ *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 tomes)*

Erich KAMKE
• *Théorie des ensembles*

Stephen C. KLEENE
• *Logique mathématique*

Félix KLEIN
• *Le programme d'Erlangen*

Casimir KURATOWSKI
• ▭ *Topologie I et II*

Jean LADRIÈRE
• ▭ *Les limitations internes des formalismes*
Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques

Joseph-Louis LAGRANGE
• *Mécanique analytique*

Trajan LALESCO
• *La géométrie du triangle*

Pierre-Simon LAPLACE
• *Théorie analytique des probabilités (2 tomes)*
Le premier tome contient le célèbre *Essai philosophique sur les probabilités*

Pierre LAROUSSE
• ▭ *Jardin des racines grecques* (Livre du Maître)
suivi de
— *Jardin des racines latines* (Livre du Maître)

Antoine-Laurent LAVOISIER
• ▭ *Traité élémentaire de chimie*

Henri LEBESGUE
• *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*
• *Les coniques*
• *Leçons sur les constructions géométriques*

C. LEBOSSÉ & C. HÉMERY
• *Géométrie (classe de Mathématiques)*

Julien LEMAIRE
• ▭ *Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées*
suivie de
— *Hypocycloïdes et épicycloïdes*

Tullio LEVI-CIVITA
• *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*

Paul LÉVY
• ▭ *Calcul des probabilités*
• ▭ *Processus stochastiques et mouvement brownien*
• ▭ *Théorie de l'addition des variables aléatoires*
• ▭ *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*

Alexandre LIAPOUNOFF
• *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ
• *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst LINDELÖF
• *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

Gérard de LONGCHAMPS
• ▭ *Cours de problèmes de géométrie analytique (3 tomes)*

Hendrik-Antoon LORENTZ
• ▭ *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat* (en anglais)

Édouard LUCAS
• ▭ *Théorie des nombres*

Nicolas LUSIN
• ▭ *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*
suivies du Mémoire
— *Sur les fonctions représentables analytiquement,* par Henri LEBESGUE

Ernst MACH
• *La Mécanique*
Exposé historique et critique de son développement

James Clerk MAXWELL
• *Traité d'Électricité et de Magnétisme (2 tomes)*

Émile MEYERSON
• ▭ *La déduction relativiste*

Charles MICHEL
• ▭ *Compléments de géométrie moderne*
suivis du recueil des solutions des questions proposées
— *Exercices de géométrie moderne,* par Julien LEMAIRE

Abraham de MOIVRE
• *The Doctrine of Chances* (en anglais)

Gaspard MONGE
• *Géométrie descriptive.*
• *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*

Pierre Rémond de MONTMORT
• *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*

John von NEUMANN
• *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

Isaac NEWTON
• *Principes mathématiques de la philosophie naturelle (2 tomes)*

Georges PAPELIER
• ▭ *Exercices de géométrie moderne précédés de l'exposé élémentaire des principales théories*
l'ouvrage comprend
I. Géométrie dirigée
II. Transversales
III. Division et faisceau harmonique
IV. Pôles, polaires, plans polaires, dans le cercle et la sphère
V. Rapport anharmonique
VI. Inversion
VII. Homographie
VIII. Involution
IX. Géométrie projective. Application aux coniques
• ▭ *Éléments de Trigonométrie sphérique*

Julius PETERSEN
• *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*

Émile PICARD
• ▭ *Traité d'Analyse (3 tomes)*
• ▭ *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*
suivies de
— *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*
— *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*
— *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*

Johann Christian POGGENDORFF
• ▭ *Histoire de la physique*

Henri POINCARÉ
• *Calcul des probabilités*
• *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*
• *Théorie du potentiel newtonien*
• *Théorie des tourbillons*
• *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
• *Électricité et Optique*
• ▭ *Théorie mathématique de la lumière*

Siméon-Denis POISSON
• *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*

George POLYA
• *Comment poser et résoudre un problème*

Alfred RÉNYI
• ▭ *Calcul des probabilités*
avec un appendice sur la théorie de l'information

Bernhard RIEMANN
• *Œuvres mathématiques*

F. RIESZ & B. SZ.-NAGY
• *Leçons d'analyse fonctionnelle*

Erwin SCHRÖDINGER
• *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Joseph-Alfred SERRET
• ▭ *Cours d'Algèbre supérieure (2 tomes)*
• ▭ *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*

Waclaw SIERPINSKI
• *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*

G. SINGIER
• ▭ *Les correspondances algébriques (1,1), (2,1), (2,2)*
Applications aux courbes et aux surfaces du deuxième et du troisième degré

Jean-Marie SOURIAU
• ▭ *Calcul linéaire*
La solution détaillée des exercices termine l'ouvrage

Paul TANNERY
• *Pour l'histoire de la science hellène*
• *La géométrie grecque*

François-Félix TISSERAND
• *Traité de Mécanique céleste (4 tomes)*
suivi de
— *Leçons sur la détermination des orbites*

Georges VALIRON
• *Équations fonctionnelles – Applications*

Vito VOLTERRA
• *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*

▭ = ▭blong®

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY
151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS
Tél. (1) 43 54 64 64 – Fax : (1) 43 54 87 00

ÉDITIONS JACQUES GABAY

RÉIMPRESSIONS

Niels Henrik ABEL
• *Œuvres complètes (2 tomes)*
suivies de
— *Niels Henrik Abel – Sa vie et son action scientifique,*
par C.-A. BJERKNES

Jean D'ALEMBERT
• *Traité de dynamique*

André-Marie AMPÈRE
• *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques*
• *Considérations sur la théorie mathématique du jeu*

Paul APPELL
• ▭ *Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes en 3 vol.)*

Louis BACHELIER
• *Calcul des probabilités*
• *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités*
suivies de
— *La spéculation et le calcul des probabilités*
— *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités*
• ▭ *Le Jeu, la Chance et le Hasard*
• *Collection de Mémoires*
titres inclus
— *Théorie de la spéculation*
— *Théorie mathématique des jeux*
— *Théorie des probabilités continues*
— *Les probabilités à plusieurs variables*
— *Mouvement d'un point ou d'un système soumis à l'action des forces dépendant du hasard*
— *Les probabilités cinématiques et dynamiques*

René BAIRE
• ▭ *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité*

Stefan BANACH
• ▭ *Théorie des opérations linéaires*

Paul BARBARIN
• *La Géométrie non euclidienne*

Edmond BAUER
• *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la physique quantique*

Jacques BERNOULLI
• *L'art de conjecturer*
Cette première partie de l'*Ars Conjectandi* (la traduction française des parties 2, 3 et 4 n'a jamais paru) contient le célèbre *Traité de la manière de raisonner dans les jeux de hasard,* par Christiaan HUYGENS

Joseph BERTRAND
• ▭ *Calcul des probabilités*

Marcel BOLL
• ▭ *La chance et les jeux de hasard*
• ▭ *Le mystère des nombres et des formes*

Ludwig BOLTZMANN
• *Leçons sur la théorie des gaz*

Émile BOREL
• *Leçons sur les séries divergentes*

Émile BOREL & André CHÉRON
• ▭ *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*
suivie de
— *Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard,* par Émile BOREL & Jean VILLE
— *Valeur pratique et philosophie des probabilités,* par Émile BOREL

Pierre BOUTROUX
• ▭ *L'idéal scientifique des mathématiciens*

Léon BRILLOUIN
• *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
• *La science et la théorie de l'information*

Louis de BROGLIE
• *Ondes et mouvements*

Georg CANTOR
• *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

Sadi CARNOT
• *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

Élie CARTAN
• *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*
• ▭ *Leçons sur la géométrie projective complexe*
suivies de
— *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*
— *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*

Augustin-Louis CAUCHY
• *Analyse algébrique*

Michel CHASLES
• *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
• *La dualité et l'homographie*
• *Rapport sur les progrès de la géométrie*

Rudolph CLAUSIUS
• ▭ *Théorie mécanique de la chaleur*

H. COMMISSAIRE & G. CAGNAC
• ▭ *Cours de Mathématiques spéciales (3 tomes)*

Antoine-Nicolas de CONDORCET
• *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*

Gaspard-Gustave CORIOLIS
• *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*
suivie des deux célèbres Mémoires
— *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*
— *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*

Gaston DARBOUX
• ▭ *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal (4 tomes)*
• ▭ *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*
• ▭ *Principes de géométrie analytique*

R. DELTHEIL & D. CAIRE
• *Géométrie*
suivie de
— *Compléments de géométrie*

G. DEMARTRES
• ▭ *Cours de géométrie infinitésimale*

René DESCARTES
• *La Géométrie*

Paul A.M. DIRAC
• *Les principes de la Mécanique quantique*

▭ = ▭blong®

(Suite à l'intérieur)

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY
151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS
Tél. (1) 43 54 64 64 – Fax : (1) 43 54 87 00

ISBN 2-87647-111-6